– Chapitre 11 – Réduction des endomorphismes et des matrices carrées (2)

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E, et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où n est un élément de $\mathbb{N}^*$.

Ce chapitre prolonge le premier chapitre de réduction des endomorphismes. Nous allons développer ici la notion de polynôme d'endomorphisme et plus particulièrement la notion de polynôme annulateur ; notions qui vont s'avérer être un outil efficace pour l'étude de la réduction d'un endomorphisme.

I. Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Définition 1. Soit $P = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$.

- Pour tout endomorphisme u de E, on note $P(u)$ l'endomorphisme de E défini par :

$P(u) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \qquad =$

- Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $P(A)$ l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par :

$P(A) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \qquad =$

⚠ On sera attentif aux égalités et , ce qui est vrai dans n'importe quel anneau.

Exemple 1. Si D est l'endomorphisme de dérivation $f \mapsto f'$ de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et si $P = X^2 - 3X + 2$, alors

Notations. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on note :

$$\mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

On appellera *polynôme* en u, tout endomorphisme v appartenant à $\mathbb{K}[u]$.
Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit de même :

$$\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

⚠ Si v appartenant à $\mathbb{K}[u]$ il y a existence mais pas forcément unicité du polynôme P tel que $v = P(u)$.

Remarque 1. $\mathbb{K}[u]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ puisque :

Définition 2. On appelle, *polynôme annulateur* d'un endomorphisme u, tout élément P de $\mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Le polynôme nul est, bien entendu, un polynôme annulateur de tout endomorphisme.

Exemple 2. Un endomorphisme est un projecteur si, et seulement si, il admet pour polynôme annulateur.

Un endomorphisme est une symétrie si, et seulement si, il admet pour polynôme annulateur.

⚠ En dimension infinie il se peut qu'un endomorphisme n'admette pas d'autre polynôme annulateur que le polynôme nul.

Exercice 1. Soit D l'endomorphisme de dérivation de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $P(D)(\mathrm{e}^{\lambda x})$.

2. Soit P un polynôme annulateur de D. Déduire de la question précédente que P est le polynôme nul.

⚠ Nous verrons qu'en dimension finie tout endomorphisme possède au moins un polynôme annulateur autre que le polynôme nul.

Rappel. $(\mathbb{K}[X], +, \cdot, \times)$ et $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ ont une structure de $\mathbb{K}$-algèbre.

Théorème 1. Soit u dans $\mathcal{L}(E)$. L'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_u & : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{L}(E) \\ & & P & \mapsto & P(u) \end{array}$$

est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

Autrement-dit, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ on a :

Démonstration.

□

⚠ On sera attentif à l'égalité : $(P \times Q)(u) =$

Remarque 2. Ces propriétés restent vraies dans le cas des matrices carrées.
On a de plus : $P(A^{\mathsf{T}}) = (P(A))^{\mathsf{T}}$ et dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ on a : $\overline{P(A)} = \overline{P}(\overline{A})$.

Corollaire 1.
1. Le noyau de φ_u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ appelé *l'idéal annulateur* de u. On a :

$$\text{Ker } \varphi_u = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}.$$

2. L'image de φ_u est $\mathbb{K}[u]$. Ainsi, $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$. C'est la plus petite sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant u. Ainsi, $\mathbb{K}[u]$ est appelée la *sous-algèbre engendrée* par u.

Démonstration.

□

II. Polynômes annulateurs. Polynôme minimal.

II.1. Polynôme annulateur et spectre.

Proposition 1. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ et pour tout $x \in E_\lambda(u), P(u)(x) = P(\lambda)x$.

Démonstration.

$\square$

Corollaire 2. Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P. Autrement-dit, le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de n'importe quel polynôme annulateur.

Démonstration.

$\square$

⚠ L'inclusion peut être stricte. Le polynôme $P = (X-1)(X-2)$ est annulateur de $u = \mathrm{Id}_E$ puisque

Le spectre de u est et l'ensemble des racines de P est

Méthode. Connaissant un polynôme annulateur P de u, les valeurs propres de u seront donc à chercher parmi les racines de P.

Exemple 3. Un projecteur vectoriel p admet pour polynôme annulateur, dont l'ensemble des racines est donc on retrouve que

Une symétrie vectorielle s admet pour polynôme annulateur, dont l'ensemble des racines est donc on retrouve que

On obtient de même :

Corollaire 3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le spectre de A est alors inclus dans l'ensemble des racines de P.

Remarque importante. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On rappelle ici que $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$. De ce fait, on peut très bien considérer P comme un élément de $\mathbb{C}[X]$ et A comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le corollaire précédent assure alors que le $\mathrm{sp}_\mathbb{C}(A)$ est contenu dans l'ensemble des racines complexes de P.

II.2. Polynôme minimal d'un endomorphisme.

Proposition 2. Tout endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède au moins un polynôme annulateur non nul dans $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration.

□

⚠ En dimension finie, l'idéal des polynômes annulateurs est donc différent de $\{0_{\mathbb{K}[X]}\}$

Rappel. Pour tout idéal I de $\mathbb{K}[X]$ il existe au moins un polynôme M tel que :

$$I = M\mathbb{K}[X] = \{M \times P \mid P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Si on suppose de plus que le polynôme M est unitaire ou nul, il est alors unique et appelé *le générateur normalisé* de I.

Notons I l'idéal des polynômes annulateurs d'un endomorphisme u i.e. $I = \text{Ker } \varphi_u$.

⚠ Si u est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, le générateur normalisé de I est non nul puisque sinon on aurait $I = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$.

Définition 3. Soit u un endomorphisme d'un espace de dimension finie E. On appelle *polynôme minimal* de u l'unique générateur unitaire de l'idéal des polynômes annulateurs de u. On le note π_u ou μ_u.

⚠ Le polynôme minimal est non nul et unitaire.

Remarque importante. On a donc :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X]\ , P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow$$

Si P est un polynôme annulateur de u l'assertion $\pi_u \mid P$ donne :

Le polynôme minimal de u est donc le polynôme annulateur unitaire de plus bas degré.

À partir d'un polynôme annulateur non nul P, on déterminera l'ensemble des diviseurs de P unitaires et annulateurs de u. Parmi ces polynômes, π_u sera unitaire et de plus bas degré.

Exemple 4. Le polynôme minimal de l'homothétie $u = \lambda \text{Id}_E$ est $\pi_u =$

En particulier le polynôme minimal de $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$ est $\pi_u =$

⚠ La réciproque de l'exemple précédent est

Exercice 2. Déterminer le polynôme minimal d'un projecteur p où $p \neq \text{Id}_E$ et $p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Remarque 5. Si E est de dimension finie, on a toujours : $\deg(\pi_u) \geqslant 1$.

Proposition 3. Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{k\in[\![0,d-1]\!]}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[u]$.

Démonstration.

$\square$

II.3. Polynôme minimal d'une matrice carrée.

Comme pour les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, on obtient que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ il existe au moins un polynôme annulateur non nul dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition 4. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *polynôme minimal* de A l'unique générateur unitaire de l'idéal des polynômes annulateurs de A. On le note π_A ou μ_A.

Proposition 4. Soit u un endomorphisme de E et $\mathcal{B}$ une base de E. La matrice $M_{\mathcal{B}}(u)$ et l'endomorphisme u ont le même polynôme minimal.

⚠ On rappelle que, par définition, $M_{\mathcal{B}}(u)$ et u ont aussi le même polynôme caractéristique.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

$\square$

Corollaire 4. Deux matrices semblables ont même polynôme minimal.

Démonstration.

□

II.4. Le théorème de Cayley-Hamilton.

Théorème 2. Théorème de Cayley-Hamilton.
Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u est un polynôme annulateur de u i.e. $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Autrement-dit : π_u divise χ_u dans $\mathbb{K}[X]$.

⚠ La démonstration n'est pas exigible. Nous le démontrerons en DM.

Proposition 5. En notant $n = \dim E$, on a : $\deg(\pi_u) \leqslant n$.

Démonstration.

□

Théorème 3. Les racines de π_u dans $\mathbb{K}$ sont les valeurs propres de u.

Démonstration.

□

Remarque 6. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a donc :

$$\chi_u(\lambda) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \in \mathrm{sp}(u) \quad \Longleftrightarrow \quad \pi_u(\lambda) = 0.$$

De même, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$\chi_A(\lambda) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{K}}(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \pi_A(\lambda) = 0.$$

Remarque importante. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Puisque $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, on peut affirmer, plus généralement, que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\chi_A(\lambda) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \pi_A(\lambda) = 0.$$

Exercice 3. Déterminer le spectre de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée que de 1. Est-elle diagonalisable ?

Exercice 4. Déterminer le polynôme minimal de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

III. Lemme de décomposition des noyaux.

Théorème 4. Lemme des noyaux.
Si $P_1, \ldots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors :

$$\text{Ker } (P(u)) = \bigoplus_{k=1}^{r} \text{Ker } (P_k(u)).$$

Démonstration. Nous allons traiter le cas $r = 2$. Le cas général s'en déduit facilement par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$.

Soit $P = P_1 \times P_2$ où $P_1 \wedge P_2 = 1$. Montrons que : $\text{Ker}\,(P(u)) = \text{Ker}\,(P_1(u)) \oplus \text{Ker}\,(P_2(u))$.

$\square$

Remarque 8. Soit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ les valeurs propres distinctes de u. En utilisant le lemme des noyaux, on retrouve que les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe. En effet, les valeurs propres $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ étant distinctes deux à deux, les polynômes $X - \lambda_1, \dots, X - \lambda_p$ sont deux à deux premiers entre eux.

Corollaire 5. Si $P_1, \dots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux, et si leur produit est un polynôme annulateur de u, alors :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} \text{Ker } (P_k(u)).$$

Démonstration.

$\square$

IV. Polynômes annulateurs et réduction.

IV.1. Critère de diagonalisation.

Théorème 5. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. u est diagonalisable,

2. son polynôme minimal est simplement scindé,

3. u annule un polynôme simplement scindé (et non nul).

Démonstration.

$\square$

IV.2. Endomorphisme induit.

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 6.
L'ensemble, noté $\mathcal{L}_F(E)$, des endomorphismes laissant F stable est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration.

□

Proposition 7. Soit u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u.
Alors, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, F est stable par l'endomorphisme $P(u)$.
On a de plus : $P(u)_F = P(u_F)$.

Démonstration.

□

Proposition 8. Les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im} P(u)$ et $\mathrm{Ker} P(u)$ sont stables par u pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

Démonstration.

□

On suppose désormais que E est un espace vectoriel de dimension finie.

Proposition 9. Polynôme minimal d'un endomorphisme induit.
Soit u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors :

$$\pi_{u_F} \mid \pi_u.$$

Démonstration.

□

Proposition 10. Diagonalisation d'un endomorphisme induit.
Si u est diagonalisable et si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors l'endomorphisme induit u_F est aussi diagonalisable.

Démonstration.

□

Rappel. On avait déjà prouvé le résultat analogue dans le cas d'un endomorphisme trigonalisable. On avait alors utilisé le polynôme caractéristique.

IV.3. Critère de trigonalisation.

Rappel.
Un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.

Théorème 6. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. u est trigonalisable,

2. son polynôme minimal est scindé sur $\mathbb{K}$,

3. u annule un polynôme scindé (et non nul) de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration.

□

V. Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Définition 5.

- Un endomorphisme u de E est dit *nilpotent* s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Dans ce cas, on appelle *indice de nilpotence* de u le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Dans ce cas, on appelle *indice de nilpotence* de A le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Théorème 7. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie égale à n. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. u est nilpotent,

2. $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$,

3. $\chi_u = X^n$,

4. il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure stricte,

5. il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire inférieure stricte,

6. u est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.

On en déduit, en particulier, que si u est nilpotent, alors son indice de nilpotence est majorée par n.

⚠ Si on obtient que $u^n \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, on peut directement conclure que u n'est pas nilpotent.

Démonstration.

□

Corollaire 6. Soit u un endomorphisme nilpotent et k son indice de nilpotence. Alors : $\pi_u =$

Démonstration.

□

On obtient évidemment des résultats analogues pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le point (4) s'écrit alors :

Exercice 5. Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation $X^2 = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet-elle des solutions ?

VI. Réduction des endomorphismes à polynômes annulateurs scindés.

Dans cette partie nous supposerons que u est un endomorphisme trigonalisable, i.e. que χ_u est scindé. En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres toutes supposées distinctes, on peut écrire :

$$\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_p)^{m_p}.$$

Définition 6. Soit u un endomorphisme trigonalisable de E, et soit λ une valeur propre de multiplicité algébrique m. Le sous-espace vectoriel : $F_\lambda(u) = \operatorname{Ker}\left((u - \lambda \mathrm{Id}_E)^m\right)$ est appelé le *sous-espace caractéristique* associé à la valeur propre λ.

Proposition 11.
- $E_\lambda(u) \subset F_\lambda(u)$,
- $F_\lambda(u)$ est stable par u.

Démonstration.

□

Théorème 8. Si u est trigonalisable alors avec les notations précédentes, on obtient :

$$E = \operatorname{Ker}\left((u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E)^{m_1}\right) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}\left((u - \lambda_p \mathrm{Id}_E)^{m_p}\right).$$

Démonstration.

□

Corollaire 7. Soit u un endomorphisme trigonalisable de E.
Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, l'endomorphisme noté u_i induit par u sur $F_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}\left((u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_i}\right)$ est la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

Démonstration.

□

Version matricielle de ce résultat :

Corollaire 8. Toute matrice trigonalisable est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} T_1 & & & \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_p \end{pmatrix}, \text{ où pour tout } i \in [\![1, p]\!],\ T_i \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} \lambda_i & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

⚠ On retiendra que toute matrice trigonalisable est semblable à une matrice diagonale par blocs, avec un bloc pour chaque valeur propre. Chacun de ces blocs est triangulaire et à termes diagonaux égaux.

En calculant le polynôme caractéristique de cette matrice, on obtient immédiatement :

Corollaire 9. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\dim F_{\lambda_i}(u) = m_i$, où m_i est la multiplicité algébrique de la valeur propre λ_i.

⚠ Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ le bloc T_i correspondant à la valeur propre λ_i, est donc de taille