– Programme de colle n° 11 : du 8 au 12/12 –

Les questions de cours et les exercices portent sur tout ce qui suit.

Les exercices portent sur le chapitre 10, mais on pourra, par exemple, demander de déterminer un polynôme minimal.

Chapitre 10 - Réduction (1) - version géométrique.

I. Rappels sur les racines d'un polynôme.

II. Sous-espaces vectoriels stables.

III. Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

III.1. Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme.
III.2. Cas des endomorphismes d'un espace de dimension finie.
III.3. Vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice carrée.
III.4. Polynôme caractéristique d'une matrice carrée.
III.5. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

IV. Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables.

IV.1. Définitions de la notion de diagonalisation.
IV.2. Conditions de diagonalisation.

V. Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables.

Un endomorphisme (ou une matrice carrée) est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé. ✎
Si u est trigonalisable, alors l'endomorphisme u_F induit par u sur un sous-espace vectoriel stable F est lui-même trigonalisable.
Trace et déterminant d'une matrice trigonalisable.

Chapitre 11 - Réduction (2) - version algébrique.

I. Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

L'application :

$$\varphi_u \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{L}(E) \\ P & \mapsto & P(u) \end{array}$$

est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. Le noyau de φ_u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ appelé *l'idéal annulateur* de u. On a : $\mathrm{Ker}\ \varphi_u = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$.

L'image de φ_u est $\mathbb{K}[u]$. Ainsi, $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$. C'est la plus petite sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant u.
Ainsi, $\mathbb{K}[u]$ est appelée la *sous-algèbre engendrée* par u.

II. Polynômes annulateurs. Polynôme minimal.

II.1. Polynôme annulateur et spectre.

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ et pour tout $x \in E_\lambda(u), P(u)(x) = P(\lambda)x$. En particulier, si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P. ✎

⚠ Mais toute racine de P n'est pas nécessairement valeur propre.

II.2. Polynôme minimal d'un endomorphisme.

Tout endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède au moins un polynôme annulateur non nul dans $\mathbb{K}[X]$. ✎

II.3. Polynôme minimal d'une matrice carrée.

⚠ Bien connaître la définition de polynôme minimal.

Si E est de dimension finie, base et dimension de $\mathbb{K}[u]$. ✎

Deux matrices semblables ont même polynôme minimal.

II.4. Le théorème de Cayley-Hamilton.

Les racines du polynôme minimal sont les valeurs propres de l'endomorphisme. ✎