– TD 11 –
Réduction des endomorphismes et des matrices carrées (2)

Exercice 1. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de cette matrice. En déduire son polynôme caractéristique.

2. Est-elle diagonalisable ?

Exercice 2. ♡ Étudier la réduction dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ de la matrice A en fonction du paramètre $k \in \mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Trigonaliser dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Réduction de Jordan. ♡

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $\chi_A = (X-\lambda)^3$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et que $\dim E_\lambda(A) = 1$. On notera u son endomorphisme canoniquement associé.

1. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{K}^3$ dans laquelle u a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

2. Appliquer la méthode de la question précédente à la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme minimal π_A de A.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par π_A.

3. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

On s'intéresse à deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ vérifiant respectivement les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -2u_{n+1} + 8u_n \quad \text{et} \quad v_{n+2} = 6v_{n+1} - 9v_n.$$

On rappelle que de telles suites sont dites *récurrentes linéaires d'ordre 2.*

Le but de cet exercice est de trouver une expression de u_n et de v_n en fonction de n sans utiliser les résultats de première année, mais en utilisant la réduction des matrices.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

a. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

b. Montrer l'existence d'une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et d'une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.

c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

d. En déduire l'existence de deux constantes α et β telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha 2^n + \beta(-4)^n$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera $Y_n = \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$.

a. Déterminer une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = BY_n$.

b. Montrer que la matrice B est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

c. En déduire l'existence de deux constantes α et β telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (\alpha + \beta n)3^n$.

Exercice 7. Théorème de Cayley-Hamilton. ♡

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note respectivement χ_A et π_A le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A. Le théorème de Cayley-Hamilton dit que χ_A est un polynôme annulateur de A, ce qui équivaut à dire que π_A divise χ_A.

Le but de cet exercice est de prouver ce théorème.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A.

Soit λ une racine complexe de π_A. Notons r l'ordre de λ en tant que racine de π_A et m l'ordre de λ en tant que racine de χ_A. Le but est de prouver que $r \leqslant m$.

On pose $v = u - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}$.

1. Montrer l'existence de $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $v^r(x) = 0$ et $v^{r-1}(x) \neq 0$.

2. Montrer que $(v^{r-1}(x), \dots, v(x), x)$ est une famille libre.

On note désormais $F = \mathrm{Vect}\ \{v^{r-1}(x), \dots, v(x), x\}$ et $\mathcal{B} = (v^{r-1}(x), \dots, v(x), x)$.

3. Montrer que F est un sous-espace vectoriel stable par u, puis déterminer la matrice de l'induit u_F dans la base $\mathcal{B}$ de F.

4. En déduire la valeur de χ_{u_F} puis montrer que $(X - \lambda)^r$ divise χ_A.

5. Conclure.

Exercice 8. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A.

2. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

3. En déduire, sans aucun calcul, le polynôme minimal π_A de A.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Trigonaliser A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 9. ♡ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit φ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi_A = AM$.
1. Démontrer que φ_A est l'endomorphisme nul si et seulement si $A = 0$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $P(\varphi_A)$ en fonction de $P(A)$.
3. En déduire que φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exercice 10. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que la matrice A est de rang pair.

Exercice 11. Sous-espaces stables. ♡
1. Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'un sev F non nul est stable par u si, et seulement si, il possède une base de vecteurs propres de u.
2. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser la matrice A, puis déterminer les sous-espaces vectoriels stables par son endomorphisme canoniquement associé, que l'on notera u.

Exercice 12. Sous-espaces stables. ♡ Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$. Montrer qu'il existe une droite ou un plan stable par u.
Indication : on pourra utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 13. Sous-espaces stables. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M_\lambda \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} -1 & \lambda & -\lambda \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par M_λ.

Exercice 14. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose l'existence d'un polynôme annulateur P tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) = 1$. Montrer que l'image et le noyau de u sont supplémentaires de E.

Exercice 15. Soit $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2$ et soit $p \in \mathbb{N}^*$ telles que $B = A^p$. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, B l'est.

Exercice 16. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A^4 = -2A^3 - 2A^2$. Montrer que $A = 0$.

Exercice 17. ♡
1. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}[X] \\ A & \mapsto & \chi_A \end{array}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que si $n \geqslant 2$, l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}[X] \\ A & \mapsto & \pi_A \end{array}$ n'est pas continue en 0.

Exercice 18. ♡ Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 19. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 - M^\top = \mathrm{I}_n$. Montrer que M est diagonalisable.

Exercice 20. Soit un entier $n \geqslant 2$ et a un réel. Soit L l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$L(M) = aM + \mathrm{tr}(M)\mathrm{I}_n.$$

1. Déterminer les éléments propres de L.

2. En déduire le polynôme minimal de L.

Exercice 21. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme réel P_n vérifiant $\sqrt{1+x} \underset{0}{=} P_n(x) + O(x^n)$.

2. Montrer que X^n divise le polynôme $P_n^2 - X - 1$.

3. Soit f un endomorphisme nilpotent de E. Montrer qu'il existe un endomorphisme g de E vérifiant $g^2 = \mathrm{Id}_E + f$.

4. Soit f un endomorphisme de E ne possédant qu'une seule valeur propre λ. On suppose, de plus, λ non nulle. Montrer qu'il existe un endomorphisme g de E vérifiant $g^2 = f$.

Exercice 22. Soit A une matrice carrée de taille 2 à coefficients entiers. On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $A^n = \mathrm{I}_2$. Montrer que $A^{12} = \mathrm{I}_2$.

Exercice 23. Diagonalisation simultanée.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable et F un sous-espace vectoriel stable par u. Montrer que l'endomorphisme induit u_F est diagonalisable.

2. Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ deux endomorphismes diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v admettent une base commune de diagonalisation i.e. une base de E dont tous les vecteurs sont des vecteurs propres de u et de v. On dit alors que u et v sont *codiagonalisables* ou *simultanément diagonalisables*.

3. Soit A une partie de $\mathcal{L}(E)$ constituée d'endomorphisme diagonalisables commutant deux à deux. Montrer que les éléments de A admettent une base commune de diagonalisation.

Exercice 24. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, où p est un nombre premier. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $A^p = A$.

Exercice 25. Endomorphismes semi-simples.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u une endomorphisme de E. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. u est diagonalisable,

2. χ_u est scindé et tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par u,

3. χ_u est scindé et tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.

On dit qu'une endomorphisme u est *semi-simple* si tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.