– Chapitre 12 : Suites et séries de fonctions –

Dans tout ce chapitre, E et F désigneront deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, munis de normes notées $\|.\|$ et A désignera une partie non vide de E.

Dans les exemples, on aura en général $E = \mathbb{R}$ et et $F = \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On s'intéresse ici aux suites et aux séries de fonctions, i.e. aux suites de la forme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction définie sur A et à valeurs dans F.

On notera $\mathcal{F}(A, F)$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur A et à valeurs dans F.

On notera $\mathcal{B}(A, F)$ le sous-espace vectoriel des fonctions définies et bornées sur A et à valeurs dans F.

I. Modes de convergence des suites de fonctions.

I.1. Convergence simple.

Définition 1. On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement* s'il existe $f \in \mathcal{F}(A, F)$ telle que pour tout $x \in A$ on ait : $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

Dans ce cas, on dira que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement* vers f (sur A).

⚠ On a évidemment unicité de la limite.

Exercice 1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$f_n : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n. \end{array}$$

I.2. Convergence uniforme.

Rappel. On a défini une norme notée $\|\cdot\|_\infty$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}(A, F)$:

Cette norme est appelée la *norme de la convergence uniforme* ou *norme infinie.*

Si B est une partie non vide de A et si f est une fonction définie sur A dont la restriction à B est bornée, on notera :

Définition 2. On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément* (sur A) s'il existe $f \in \mathcal{F}(A, F)$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in A,\ \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dira que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément* vers f (sur A).

Cette définition se reformule ainsi :

Définition 3. On dit que une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément* (sur A) s'il existe $f \in \mathcal{F}(A, F)$ telle qu'à partir d'un certain rang la fonction $f_n - f$ est bornée, et telle que :

$$\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

⚠ Nous ne sommes pas en train de dire que la convergence uniforme correspond à la convergence dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(A, F), \|\cdot\|_\infty)$. En effet, ni les fonctions f_n ni la fonction f ne sont supposées appartenir à $\mathcal{B}(A, F)$. Ce qui appartient à $\mathcal{B}(A, F)$ c'est seulement $f_n - f$, et seulement à partir d'un certain rang.

Interprétation géométrique.

On suppose ici que A est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que $F = \mathbb{R}$.
Dire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel le graphe de toutes les fonctions f_n est contenu dans la partie du plan définie par :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A \text{ et } f(x) - \varepsilon \leqslant y \leqslant f(x) + \varepsilon\}.$$

Remarque importante.

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f signifie :

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f signifie :

On en déduit que la convergence uniforme implique la convergence simple :

Proposition 1. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A.

Ce résultat montre en particulier l'unicité de la limite uniforme.

Méthode. Pour étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pourra donc commencer par déterminer une fonction f vers laquelle $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement, puis voir si cette convergence est uniforme ou pas.

Exercice 2. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x}\dfrac{x^n}{n!}$

Exercice 3. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$f_n \quad : \quad \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n. \end{array}$$

⚠ Lorsque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur A, on se contentera parfois de la convergence uniforme sur une partie non vide B de A.

Exercice 4. On reprend l'exercice précédent. Montrer que pour tout $a \in]0,1[$, la convergence est uniforme sur $[0,a]$.

Proposition 2. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, alors pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A on a :

$$f_n(a_n) - f(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration.

□

Méthode. Pour montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f, il suffit donc d'exhiber une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que : $f_n(a_n) - f(a_n) \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.

Remarque 2. On en déduit une autre solution de l'exercice 3.

Exercice 5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{B}(A,F)$ (ce qui signifie que pour tout $n\in\mathbb{N}$ la fonction f_n est bornée sur A). Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur A, alors $f\in\mathcal{B}(A,F)$.

On déduit de l'exercice précédent, que dans le cas particulier des fonctions bornée, la convergence uniforme correspond à la convergence dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(A,F), \|.\|_\infty)$. Plus précisément :

Proposition 3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{B}(A,F)$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A si, et seulement si, elle converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(A,F), \|.\|_\infty)$.

On comprend donc pourquoi la norme $\|.\|_\infty$ est appelée la norme de la convergence uniforme.

Proposition 4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions qui convergent uniformément vers f et g respectivement.
Alors, pour tous scalaires $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\alpha f + \beta g$.

Démonstration.

□

Proposition 5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions de $\mathcal{B}(A, F)$ qui convergent uniformément vers f et g respectivement. Alors, $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers fg.

Démonstration.

□

II. Continuité. Double limite.

Théorème 1. Soit $a \in A$. Si les f_n sont continues en a et si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, alors f est continue en a.

Démonstration.

□

On en déduit une solution particulièrement efficace de l'exercice 3.

Corollaire 1. Si les f_n sont continues sur A et si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, alors f est continue sur A.

Remarque importante. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les f_n sont continues en a. Et supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A.

Nous avons vu que la convergence simple ne suffit pas pour assurer de la continuité de f en a.

La convergence uniforme suffit, mais n'est pas toujours satisfaite.

Grâce au caractère local de la continuité, pour prouver la continuité de f en a, il suffit de prouver la converge uniforme vers f sur un voisinage de a (relatif dans A).

Par exemple, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et s'il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans I, alors la fonction f sera continue en tout point de I.

Théorème 2. Théorème de la "double limite". Soit a un point adhérent à A. On suppose que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite $\ell_n \in F$ en a,
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers une fonction f.

Alors, la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in F$, et la fonction f admet ℓ pour limite en a. Autrement-dit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right).$$

Démonstration. Admis. □

Remarque 4.

1. Dans le cas où toutes les fonctions f_n sont continues en a, l'égalité précédente donne :

Autrement-dit, on retrouve que .

2. Dans le cas où A est une partie de $\mathbb{R}$ non bornée, le théorème précédent reste vrai avec $a = \pm\infty$.

Exercice 6. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par : $f_n(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^{nx}$.

III. Intégration d'une limite uniforme sur un segment.

Dans cette partie, les fonctions sont définies sur un segment I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 3. On suppose que $I = [a, b]$ avec $a < b$ et que les fonctions f_n sont continues sur I. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors :

$$\int_{[a,b]} f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f$$

Démonstration.

$\square$

Remarque 5. Cette démonstration prouve un peu mieux que le théorème énoncé ici. Elle prouve que la convergence uniforme sur un segment entraine la convergence en moyenne ; i.e. que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$, elle converge aussi vers f dans $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_1)$. Ceci découle simplement de l'inégalité des normes : $\|\cdot\|_1 \leqslant (b-a)\|\cdot\|_\infty$

Exercice 7. Montrer que la convergence uniforme sur un segment entraine la convergence en moyenne quadratique ; i.e. que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$, elle converge aussi vers f dans $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_2)$.

⚠ Ce théorème fournit une méthode supplémentaire pour prouver qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément :

Exercice 8. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ par : $f_n(x) = n\cos(x)\sin^n(x)$.

Théorème 4. On suppose que les fonctions f_n sont continues sur I et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers f.

Soit a un point de I. On définit φ et φ_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les primitives respectivement de f et f_n qui s'annulent en a :

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \varphi_n(x) = \int_a^x f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

Alors, φ_n converge uniformément sur tout segment de I vers φ.

Démonstration.

□

Remarque 6. Grâce à ce théorème, on retrouve facilement le théorème précédent.

IV. Dérivation d'une suite de fonctions.

Dans cette partie, les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 9. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = \sqrt{x + \dfrac{1}{n}}$.

⚠ On a vu que la limite uniforme d'une suite de fonctions continue est continue.
Mais cet exemple montre que la limite uniforme d'une suite de fonctions dérivables (même de classe $\mathcal{C}^\infty$) peut ne pas être dérivable.

Théorème 5. On suppose que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur I,
- la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g.

Alors :

- la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$,
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Démonstration.

□

⚠ La démonstration précédente montre qu'il n'est pas nécessaire de supposer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I, mais qu'il suffit de supposer la convergence de $(f_n(a))$ en au moins un élément a de I.

L'exemple suivant montre qu'on ne peut cependant pas s'affranchir de cette hypothèse :

Exemple 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in [0,1]$, on pose : $f_n(x) = x+n$. La suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$, mais la suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge en aucun a de $[0,1]$.

On obtient par récurrence le théorème suivant :

Théorème 6. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I,
- pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I,
- la suite $\left(f_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la limite simple, notée f, de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $\mathcal{C}^p$, et pour tout $k \in [\![0, p]\!]$:

$$\forall x \in I,\ f^{(k)}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(k)}(x).$$

V. Approximation uniforme.

V.1. Approximation uniforme par des fonctions en escalier.

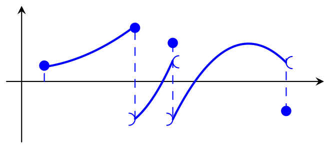
Définition 4. Une fonction f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est dite *en escalier*, s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle de la forme $]x_i, x_{i+1}[$.
Une telle subdivision est dite *adaptée* à f.

Définition 5. Une fonction f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est dite *continue par morceaux*, s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:

1. f soit continue sur $]x_i, x_{i+1}[$,

2. $\lim\limits_{x_i^+} f$ et $\lim\limits_{x_{i+1}^-} f$ existent et soient finies. Une telle subdivision est dite *adaptée* à f.

⚠ Le point 2 équivaut au fait que la restriction $f|_{]x_i,x_{i+1}[}$ soit prolongeable par continuité à $[x_i, x_{i+1}]$.



Remarque 7. Les fonctions continues et les fonctions en escalier sont continues par morceaux.

Exemple 2. La fonction f définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ n'est pas continue par morceaux sur $[-1, 1]$.

Proposition 6. Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée.

Démonstration.

□

Théorème 7. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a,b]$ telle que $\|f-\phi\|_\infty \leqslant \varepsilon$ i.e. :

$$\forall x \in [a,b],\ |f(x)-\phi(x)| \leqslant \varepsilon.$$

2. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions ϕ et ψ en escalier sur $[a,b]$ telles que :

$$\phi \leqslant f \leqslant \psi \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \psi - \phi \leqslant \varepsilon.$$

3. Toute fonction continue par morceaux sur un segment y est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

Démonstration. **1.** Pour montrer (1) nous allons d'abord traiter le cas continue.

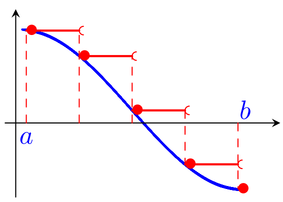
- Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur le segment $[a,b]$, donc il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, |x-y| \leqslant \eta \ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision de $[a,b]$ avec un pas constant δ tel que $\delta \leqslant \eta$.

Pour tout $x \in [a,b]$, posons : $\phi(x) = \begin{cases} f(x_i) & \text{si} \quad x_i \leqslant x < x_{i+1} \\ f(b) & \text{si} \quad x = b. \end{cases}$



□

V.2. Approximation uniforme par des fonctions polynomiales.

Théorème 8. Théorème de Weierstrass.
Toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Si une fonction f est seulement continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ (mais pas continue). Ce théorème est-il encore valable ?

VI. Séries de fonctions.

VI.1. Convergence simple, uniforme et normale d'une série de fonctions.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F.

Définition 6. On appelle série de terme général f_n la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} f_k.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Le terme u_n est appelé *terme général de la série*,
- Le terme S_n est appelé *somme partielle d'indice n de la série*.

On note $\sum f_n$ la série de terme général f_n.

Définition 7. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur A si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A.
Dans ce cas, on appelle fonction somme de la série la fonction S définie sur A par :

$$\forall x \in A, \; S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x).$$

Définition 8. Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur A, alors la somme de la série convergente $\sum\limits_{k\geqslant n+1} f_k$ est notée R_n et appelée le *reste d'ordre n* de la série $\sum u_n$:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k.$$

Remarque 8. Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur A, en notant respectivement S_n et R_n la somme partielle et le reste d'ordre n, on a :

Définition 9. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A.

⚠ On rappelle que la convergence uniforme implique la convergence simple.

Proposition 7. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si la suite de ses restes converge uniformément vers 0.

Démonstration.

□

Définition 10. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A si les fonctions f_n sont bornées sur A (à partir d'un certain rang) et si la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty,A}$ converge.

Pour justifier la convergence normale, on se contentera en pratique d'une majoration $\|f_n\|_{\infty,A} \leqslant \alpha_n$ où α_n est le terme général (positif) d'une série numérique convergente.

Exemple 3. La série de terme général $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ puisque :

Théorème 9. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A alors elle converge uniformément sur A, et l'on a :

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right\|_{\infty,A} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty,A}$$

Démonstration.

□

⚠ La convergence normale est donc un outil efficace pour prouver la convergence uniforme. Néanmoins la réciproque du théorème précédent est fausse :

Exercice 10. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$: $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n} x^n$.

1. Prouver que la série de terme général f_n converge uniformément sur $[0,1]$.

2. Montrer qu'il n'y a pas convergence normale.

VI.2. Continuité. Double limite.

Les théorèmes de continuité et de double limite s'adaptent évidemment au cas particulier des séries de fonctions.

Théorème 10. Soit $a \in A$. Si les f_n sont continues en a et si $\sum f_n$ converge uniformément sur A, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a.

Corollaire 2. Si les f_n sont continues sur A et si $\sum f_n$ converge uniformément sur A, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A.

Exercice 11. Montrer que la fonction $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque importante.

Grâce au caractère local de la continuité, pour prouver la continuité de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ en a, il suffit de prouver la converge uniforme vers f sur un voisinage de a (relatif dans A).

Exemple 4. Continuité de la fonction zêta de Riemann réelle.
La fonction zêta de Riemann réelle est la fonction notée ζ et définie sur $I =]1, +\infty[$ par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Théorème 11. Théorème de la double limite.
Soit a un point adhérent à A. On suppose que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite $\ell_n \in F$ en a,
- la série $\sum f_n$ converge uniformément sur A.

Alors :

- la série $\sum \ell_n$ converge dans F,
- $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite en a,
- $\lim_{x \to a} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$, ou encore :

Exercice 12. Étudier la convergence uniforme sur $]1, +\infty[$ de la série de fonctions définissant la fonction ζ de Riemann.

VI.3. Intégration terme à terme d'une série.

Dans cette partie, les fonctions sont définies sur un segment I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 12. On suppose que $I = [a, b]$ avec $a < b$ et que les fonctions f_n sont continues sur I. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors la série des intégrales sur I converge, et l'on peut intégrer terme à terme :

$$\int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} f_n.$$

Exemple 5.

VI.4. Dérivation terme à terme d'une série.

Dans cette partie, les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 13. On suppose que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
- la série $\sum f_n$ converge simplement sur I,
- la suite $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors, la somme de la série est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et l'on peut dériver terme à terme :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Proposition 8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,
- pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, la série $\sum f_n^{(i)}$ converge simplement sur I,
- la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors, la somme de la série est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et :

$$\forall i \in [\![0, k]\!], \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}.$$

Exemple 6. Retour sur la fonction ζ de Riemann réelle définie sur $I =]1, +\infty[$ par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$