

– Programme de colle n° 12 : du 15 au 19/12 –

Les exercices portent sur le chapitre 11 : version algébrique de la réduction.

CHAPITRE 11 - RÉDUCTION (2) - VERSION ALGÉBRIQUE.**I. POLYNÔMES D'UN ENDOMORPHISME, D'UNE MATRICE CARRÉE.****II. POLYNÔMES ANNULATEURS. POLYNÔME MINIMAL.**

- II.1.** Polynôme annulateur et spectre.
- II.2.** Polynôme minimal d'un endomorphisme.
- II.3.** Polynôme minimal d'une matrice carrée.
- II.4.** Le théorème de Cayley-Hamilton.

III. LEMME DE DÉCOMPOSITION DES NOYAUX.

La démonstration du lemme de décomposition est facultative. 

IV. POLYNÔMES ANNULATEURS ET RÉDUCTION.**IV.1.** Critère de diagonalisation.**Théorème** 

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- 1.** u est diagonalisable,
- 2.** son polynôme minimal est simplement scindé,
- 3.** u annule un polynôme simplement scindé (et non nul).

IV.2. Endomorphisme induit.

$\pi_{u_F} \mid \pi_u$. Par conséquent, si u est diagonalisable, alors u_F est diagonalisable. 

IV.3. Critère de trigonalisation.**Théorème** 

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- 1.** u est trigonalisable,
- 2.** son polynôme minimal est scindé sur \mathbb{K} ,
- 3.** u annule un polynôme scindé (et non nul) de $\mathbb{K}[X]$.

V. ENDOMORPHISMES NILPOTENTS, MATRICES NILPOTENTES

Théorème

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie égale à n . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. u est nilpotent,
2. $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$,
3. $\chi_u = X^n$,
4. il existe une base \mathcal{B} de E telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure stricte,
5. il existe une base \mathcal{B} de E telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire inférieure stricte,
6. u est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.

On en déduit, en particulier, que si u est nilpotent, alors son indice de nilpotence est majorée par n .

Soit u un endomorphisme nilpotent et d son indice de nilpotence. Alors : $\pi_u = X^d$.

VI. RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES À POLYNÔMES ANNULATEURS SCINDÉS.

\triangle Cette partie doit être particulièrement bien connue.

Soit u un endomorphisme trigonalisable de E , et soit λ une valeur propre de multiplicité algébrique m . Le sous-espace vectoriel $F_{\lambda}(u) = \text{Ker}((u - \lambda \text{Id}_E)^m)$ est appelé le *sous-espace caractéristique* associé à la valeur propre λ .

$E_{\lambda}(u) \subset F_{\lambda}(u)$ et $F_{\lambda}(u)$ est stable par u .

Si u est trigonalisable on obtient : $E = \text{Ker}((u - \lambda_1 \text{Id}_E)^{m_1}) \oplus \cdots \oplus \text{Ker}((u - \lambda_p \text{Id}_E)^{m_p})$.

Si λ une valeur propre de u de multiplicité algébrique m , alors : $\dim F_{\lambda}(u) = m$.

Si u est trigonalisable, alors pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, l'endomorphisme noté u_i induit par u sur $F_{\lambda_i} = \text{Ker}((u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i})$ est la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

Version matricielle de ce résultat.

\triangle Même si cela fera l'objet d'un chapitre ultérieur, le théorème spectral (version matricielle) a été énoncé, et on a vu un contre-exemple pour une matrice symétrique à coefficients complexes.

CHAPITRE 12 - SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS.

\triangle Cours uniquement.

I. MODES DE CONVERGENCE DES SUITES DE FONCTIONS.

Convergence simple. Convergence uniforme.

\triangle Ne pas confondre la convergence uniforme sur A et la convergence dans l'espace vectoriel normé des fonctions bornées sur A ($\mathcal{B}(A, F)$, $\|\cdot\|_{\infty}$). En effet, pour la convergence uniforme ni les fonctions f_n ni la fonction f ne sont supposées appartenir à $\mathcal{B}(A, F)$. Ce qui appartient à $\mathcal{B}(A, F)$ c'est seulement $f_n - f$, et seulement à partir d'un certain rang.

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A , alors pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A on a : $f_n(a_n) - f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions qui convergent uniformément vers f et g respectivement. Alors, pour tous scalaires $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\alpha f + \beta g$.

II. CONTINUITÉ. DOUBLE LIMITE.

Soit $a \in A$. Si les f_n sont continues en a et si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A , alors f est continue en a .

Théorème de la « double limite ». Soit a un point adhérent à A . On suppose que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite $\ell_n \in F$ en a ,
- la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers une fonction f .

Alors, la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in F$, et la fonction f admet ℓ pour limite en a . Autrement-dit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right).$$