– Chapitre 13 : Séries entières –

Dans tout ce chapitre, (a_n) désigne une suite de nombres complexes.

I. Séries entières et rayon de convergence.

I.1. Définition d'une série entière.

Définition 1.

- On appelle *série entière* toute série de fonctions $\sum f_n$ où f_n est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto a_n z^n$.

Cette série entière sera notée $\sum a_n z^n$.

- On appelle *série entière de la variable réelle* toute série de fonctions $\sum f_n$ où f_n est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $t \mapsto a_n t^n$.

Cette série entière sera notée $\sum a_n t^n$.

⚠ Bien qu'une série entière se note abusivement $\sum a_n z^n$, c'est bien une série de fonctions et non pas une série numérique.

Exemples de référence. $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n!}$, $\sum n z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$.

⚠ Le premier objectif de ce chapitre, est de savoir déterminer le domaine de convergence de la série, rien qu'en regardant les coefficients a_n.

I.2. Rayon de convergence d'une série entière.

Théorème 1. Lemme d'Abel.
Soit un réel $r_0 > 0$. Si la suite $(a_n r_0^n)$ est bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r_0$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Démonstration.

□

Définition 2. On appelle *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$ l'élément R de $[0, +\infty]$ défini par :

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ est bornée}\}.$$

Remarque importante. Notons $I = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$.
I est non vide puisque Ainsi, I admet bien une borne supérieure dans $[0, +\infty]$.

Remarque 2. I est un intervalle. En effet, il est clair que si r est un élément de I alors $[0, r] \subset I$.

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum z^n$.

Remarque 3. On montre de même que le rayon de convergence des séries $\sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum \frac{z^n}{n^2}$ est 1.

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum \frac{z^n}{n!}$.

Dans la suite, R désignera le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

I.3. Domaine de convergence. Disque ouvert de convergence.

Théorème 2. Soit $z \in \mathbb{C}$.
1. Si $|z| < R$ alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
2. Si $|z| > R$ alors la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
Par contraposée, si $\sum a_n z^n$ converge, alors $|z| \leqslant R$.

Démonstration.

$\square$

Corollaire 1. Les ensembles suivants ont tous les 4 pour borne supérieure dans $[0, +\infty]$ le rayon de convergence R de la série $\sum a_n z^n$:

$I_1 = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ $\quad I_2 = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ converge vers } 0\}$
$I_3 = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \sum a_n r^n \text{ converge}\}$ $\quad I_4 = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \sum a_n r^n \text{ converge absolument}\}$.

Démonstration.

□

Définition 3. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. On appelle *disque ouvert de convergence* et l'on note D ou $D(0, R)$ la boule ouverte de rayon R :

$$D = D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}.$$

2. On appelle *intervalle ouvert de convergence*, l'intervalle $]-R, R[$ i.e. $D \cap \mathbb{R}$.

3. On notera C ou $C(0, R)$ sa frontière, i.e. le cercle de rayon R :

$$C = C(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}.$$

4. On notera $\overline{D}$ l'adhérence de D, i.e. le disque fermé de rayon R :

$$\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R\} = D \cup C.$$

5. On appelle *domaine de convergence* et on notera Ω l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série entière converge (simplement), et on appellera *somme de la série entière*, l'application S définie par :

$$\forall z \in \Omega, \ S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Remarque importante. Si $R > 0$ alors le théorème 2 se reformule donc ainsi :

Dans le cas de la variable réelle on obtient : .

⚠ Si $R = +\infty$ alors : $D = \Omega = \overline{D} = \mathbb{C}$, et $C = \varnothing$.

Exercice 3. Pour chacune des 3 séries suivantes, dire si les inclusions $D \subset \Omega$ et $\Omega \subset \overline{D}$ sont strictes ou pas : $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$, $\sum \frac{z^n}{n^2}$.

⚠ On retiendra que déterminer le domaine de convergence nécessite une étude plus approfondie que le seul calcul du rayon de convergence. Le cercle C de rayon R est parfois appelé *le cercle d'incertitude* puisque si $z \in C$, on ne sait pas, a priori, si la série converge en ce point.

I.4. Détermination du rayon de convergence.

Proposition 1. Soit $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b.

1. Si $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$.

2. Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.

3. Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Démonstration.

$\square$

Proposition 2. Règle de d'Alembert.

Soit $\sum a_n\, z^n$ une série de rayon de convergence R.

Supposons qu'il existe un rang n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ a_n \neq 0$.

Supposons aussi que la suite $\left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\geqslant n_0}$ admette une limite $L \in [0, +\infty]$.

Si $L \in \mathbb{R}_+^*$ alors $R = \frac{1}{L}$. Si $L = 0$ alors $R = +\infty$. Si $L = +\infty$ alors $R = 0$.

Démonstration.

□

⚠ La règle de d'Alembert ne s'applique pas à toutes les séries entières puisqu'il faut que la suite (a_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Proposition 3. Série entière « dérivée ».
Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration.

□

Remarque importante. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $r \in \mathbb{R}_+$.

- Si la suite $(a_n r^n)$ est bornée alors, $r \leqslant R$.
- Si $r < R$, alors la suite $(a_n r^n)$ est bornée.

Exemple 1. La série entière $\sum \frac{z^n}{n^{2025}}$ a un rayon de convergence égale à :

I.5. Somme de deux séries entières.

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b.

Proposition 4. Le rayon de convergence R de la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geqslant \min\{R_a, R_b\}$, et si $R_a \neq R_b$, alors $R = \min\{R_a, R_b\}$.
De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$ on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Démonstration.

□

Remarque importante. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si la série $(\sum a_n z^n)$ converge alors, $|z| \leqslant R$.
- Si $|z| < R$, alors la série $(\sum a_n z^n)$ converge.

I.6. PRODUIT DE CAUCHY DE DEUX SÉRIES ENTIÈRES.

Rappel. Produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes.
Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument convergentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

On montre que la série $\sum c_n$ converge absolument et que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$.

Définition 4. On appelle *produit de Cauchy* des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum c_n z^n$ où c_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Proposition 5. Le rayon de convergence R de la série produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ vérifie :

$$R \geqslant \min\{R_a, R_b\}.$$

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$ on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Démonstration.

□

⚠ Pour le produit de Cauchy, même si $R_a \neq R_b$, alors on ne peut pas conclure que $R = \min\{R_a, R_b\}$:

Exercice 4. On considère les séries entières $\sum a_n z^n$ avec $a_0 = 1, a_1 = -1$ et $a_n = 0$ pour $n \geqslant 2$ et $\sum z^n$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de leur produit de Cauchy.

Exemple 2.

II. Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe.

Théorème 3. Une série entière converge normalement (et donc uniformément) sur tout disque fermé centré en 0 et contenu dans son disque ouvert de convergence.

Démonstration.

□

Plus généralement :

Théorème 4. Une série entière converge normalement (et donc uniformément) sur tout compact contenu dans son disque ouvert de convergence.

C'est en particulier le cas sur toute boule fermée (quelque soit son centre) contenue dans le disque ouvert de convergence.

Démonstration.

□

⚠ Il n'y a, en revanche, pas toujours convergence normale, ni même uniforme, sur le disque ouvert de convergence.

Exercice 5. Montrer que la série $\sum z^n$ de rayon de convergence $R = 1$ ne converge pas uniformément sur le disque ouvert de convergence.

On rappelle que l'on note D le disque ouvert de convergence, Ω l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série entière converge (simplement), et S l'application définie sur Ω par :

$$\forall z \in \Omega,\ S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n.$$

Théorème 5. La fonction S est continue sur le disque ouvert de convergence.

Démonstration.

□

III. Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle.

III.1. Continuité de la fonction somme.

Nous nous intéressons maintenant au cas de la variable réelle, que nous noterons t pour ne pas confondre avec ce qui précède.

Dans ce cas, la somme S de la série est définie sur l'intervalle ouvert de convergence, mais peut-être aussi en R ou en $-R$ dans certains cas.

Théorème 6. Théorème d'Abel radial.
Soit $\sum a_n\, t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Si la série numérique $\sum a_n\, R^n$ converge alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n \underset{t \to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, R^n.$$

Autrement-dit, si S est définie en R, alors S est continue en R.

Démonstration. Admis. □

Ce théorème est également valable en $-R$.

Corollaire 2. La somme d'une série entière de la variable réelle est continue sur l'intervalle de convergence (i.e. en tout point où la série converge).

III.2. Dérivabilité de la fonction somme.

Théorème 7. Soit $\sum a_n\, t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
On note $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ sa somme. La fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$ et l'on peut dériver terme à terme :

$$\forall t \in]-R, R[,\ S'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n\, t^{n-1}.$$

⚠ On a déjà vu que la série $\sum na_n t^{n-1}$ est également de rayon de convergence R.

Démonstration.

□

Corollaire 3. La somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.

Démonstration.

□

Exemple 3. Notons S la somme de la série entière $\sum t^n$:

$\forall t \in]-1,1[,\ S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n =$

Corollaire 4. Soit $\sum a_n\, t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S. Alors :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ a_p = \frac{S^{(p)}(0)}{p!}.$$

Démonstration.

□

Proposition 6. Unicité du développement en série entière.
Soit $\sum a_n\, t^n$ et $\sum b_n\, t^n$ deux séries entières de rayon de convergence strictement positif. S'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall t \in]0, \alpha[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, t^n,$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$.

Démonstration.

□

Exercice 6. Que peut-on dire des coefficients d'une série entière $\sum a_n\, t^n$ lorsque la somme S est une fonction paire sur $]-R, R[$?

Proposition 7. Primitivation d'une série entière.
Soit $\sum a_n\, t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S. Alors une primitive de S sur $]-R, R[$ est donnée par :

$$\forall t \in]-R, R[,\ F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\, t^{n+1}.$$

Démonstration.

$\square$

IV. Développements en série entière.

IV.1. Fonctions développables en série entière.

Définition 5. Soit U un voisinage de 0 contenu dans $\mathbb{C}$ et f une fonction définie sur U et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit un réel $r > 0$.

On dit que f est *développable en série entière* sur $D(0, r)$ s'il existe une série entière $\sum a_n\, z^n$ telle que :

$$\forall z \in D(0, r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n.$$

S'il existe un tel réel $r > 0$, on dit simplement que f est *développable en série entière* au voisinage de 0.

Exemple 4. Toute fonction polynomiale est développable en série entière sur $\mathbb{C}$.

Exemple 5. La fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ est développable en série entière sur $D(0, 1)$ puisque :

$$\forall z \in D(0, 1),\ \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

Exemple 6. La fonction exponentielle définie sur $\mathbb{C}$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ puisque :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Proposition 8. Si f et g sont des fonctions développables en série entière sur $D(0,r)$, alors $f+g$, αf et fg sont développables en série entière sur $D(0,r)$.

Démonstration. $\square$

Et comme la fonction nulle est évidemment développable en série entière au voisinage de 0 :

Corollaire 5. L'ensemble des fonctions définies sur U et développables en série entière au voisinage de 0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(U,\mathbb{C})$.

Proposition 9. Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$, alors les dérivées successives et les primitives de f sont développables en série entière sur $]-r,r[$.

Démonstration. $\square$

IV.2. Développements usuels (variable réelle).

Proposition 10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2\,n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2\,n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2\,n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2\,n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Démonstration.

$\square$

Proposition 11. Pour tout $x \in]-1,1[$ on a :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Démonstration.

□

Remarque 7. En remplaçant x par $-x$ dans le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, on obtient :

Remarque importante.

Proposition 12. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Démonstration.

□