– Programme de colle n° 13 : du 05 au 09/01 –

Les questions de cours portent sur tout ce qui suit.
Les exercices portent sur le chapitre 12 - Suites et séries de fonctions.

Chapitre 12 - Suites et séries de fonctions.

I. Modes de convergence des suites de fonctions.

Convergence simple. Convergence uniforme.

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, alors pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A on a : $f_n(a_n) - f(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions qui convergent uniformément vers f et g respectivement. Alors, pour tous scalaires $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\alpha f + \beta g$.

II. Continuité. Double limite.

Soit $a \in A$. Si les f_n sont continues en a et si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, alors f est continue en a. ✎

Théorème de la « double limite ». Soit a un point adhérent à A. On suppose que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite $\ell_n \in F$ en a,
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers une fonction f.

Alors, la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in F$, et la fonction f admet ℓ pour limite en a. Autrement-dit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{x\to a} f_n(x) \right) = \lim_{x\to a} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \right).$$

III. Intégration d'une limite uniforme sur un segment.

On suppose que $I = [a, b]$ avec $a < b$ et que les fonctions f_n sont continues sur I. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors : $\displaystyle\int_{[a,b]} f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f$. ✎

On suppose que les fonctions f_n sont continues sur I et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers f.

Soit a un point de I. On définit φ et φ_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les primitives respectivement de f et f_n qui s'annulent en a :

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \varphi_n(x) = \int_a^x f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

Alors, φ_n converge uniformément sur tout segment de I vers φ. ⚠

IV. DÉRIVATION D'UNE SUITE DE FONCTIONS.

On suppose que : ✎
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur I,
- la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g.

Alors :
- la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$,
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I.

V. APPROXIMATION UNIFORME.

V.1. Approximation uniforme par des fonctions en escalier.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a, b]$ telle que $\|f - \phi\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
Autrement-dit, toute fonction continue par morceaux sur un segment y est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

V.2. Approximation uniforme par des fonctions polynomiales.

⚠ Théorème de Weierstrass. Toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

VI. SÉRIES DE FONCTIONS.

VI.1. Convergence simple, uniforme et normale d'une série de fonctions.
VI.2. Continuité. Double limite.
VI.3. Intégration terme à terme d'une série.
VI.4. Dérivation terme à terme d'une série.
Savoir prouver que la fonction zêta de Riemann est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$. ✎

CHAPITRE 13 - SÉRIES ENTIÈRES.

⚠ Cours uniquement.

I. SÉRIES ENTIÈRES ET RAYON DE CONVERGENCE.

I.1. DÉFINITION D'UNE SÉRIE ENTIÈRE.

I.2. RAYON DE CONVERGENCE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE.

Lemme d'Abel. ✎

I.3. DOMAINE DE CONVERGENCE. DISQUE OUVERT DE CONVERGENCE.

Si $|z| < R$ alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument. Si $\sum a_n z^n$ converge, alors $|z| \leqslant R$. ✎
Les ensembles suivants ont tous les 4 pour borne supérieure dans $[0, +\infty]$ le rayon de convergence R de la série : $I_1 = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ $\quad I_2 = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ converge vers } 0\}$
$I_3 = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \sum a_n r^n \text{ converge}\}$ $\quad I_4 = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \sum a_n r^n \text{ converge absolument}\}$.

⚠ Connaître le rayon de convergence ne nous donne qu'une information partielle sur le domaine de convergence. En effet, si $R > 0$ on a : $\boxed{D \subset \Omega \text{ et } \Omega \subset \overline{D}}$.

I.4. Détermination du rayon de convergence.

Soit $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b.

1. Si $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$. ✎

2. Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.

3. Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Règle de d'Alembert. ⚠ La règle de d'Alembert n'est qu'une implication.

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.✎

I.5. Somme de deux séries entières.

I.6. Produit de Cauchy de deux séries entières.

Le rayon de convergence R de la série produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ vérifie : $R \geqslant \min\{R_a, R_b\}$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$ on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$.

II. Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe.

Une série entière converge normalement (et donc uniformément) sur tout compact contenu dans son disque ouvert de convergence. ✎

C'est en particulier le cas sur toute boule fermée (quelque soit son centre) contenue dans le disque ouvert de convergence. La fonction S est continue sur le disque ouvert de convergence.

III. Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle.

III.1. Continuité de la fonction somme.

Théorème d'Abel radial pour la variable réelle (démonstration admise).

III.2. Dérivabilité de la fonction somme.

La fonction S est $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$ et l'on peut dériver terme à terme : $\forall t \in]-R, R[,\ S'(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n\, t^{n-1}$.

Par récurrence, on obtient que la somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.

Si $\sum a_n\, t^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S. Alors : $\forall p \in \mathbb{N},\ a_p = \dfrac{S^{(p)}(0)}{p!}$. Unicité du développement en série entière.