– TD 12 : Suites et séries de fonctions –

Exercice 1. Soit $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$u_n(x) = \begin{cases} x^n \ln x & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (u_n) sur $[0,1]$.

Exercice 2. Étudier la convergence uniforme de $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}.$$

Exercice 3. Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1-nx) & \text{si } x \in [0,1/n] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0,1]$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[0,1]$.
3. Calculer :

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

et retrouver le résultat de la question précédente.
4. Étudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ pour tout $a \in]0,1[$.

Exercice 4. Soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0,n[\\ 0 & \text{si } x \geqslant n. \end{cases}$$

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}_+$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations de la fonction h_n définie sur $[0,n[$ par :

$$h_n(x) = (n-1)\ln(1-x/n) + x.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $g_n = f - f_n$ où f désigne la limite simple de (f_n) sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$.
Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de terme général f_n.

Exercice 6. Soit l'application définie sur $\mathbb{R}_+$: $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}$.

1. Étudier la convergence (dire s'il y a convergence simple, uniforme) de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}_+$.

2. On s'intéresse maintenant à la série de fonctions $\sum f_n$. Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$, mais qu'il y a convergence uniforme sur tout segment $[0, a]$ avec $a > 0$.

Exercice 7. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = x^n f(x).$$

1. On suppose que la suite de fonction (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$. Montrer que $f(1) = 0$.

2. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$. Montrer que $f(1) = 0$, que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 0$.

Exercice 8. Fonction êta de Dirichlet.

On pose :

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

Montrer que la fonction η est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 9. Fonction zêta de Riemann réelle.

La fonction ζ de Riemann réelle est définie sur $I =]1, +\infty[$ par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1. Calculer sa limite en $+\infty$.

2. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent en 1^+.

Exercice 10. Méthode des moments.

Soit deux réels a et b avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b f(t) t^n \,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que f est identiquement nulle.

Indication : on pourra utiliser un théorème important de ce chapitre.

Exercice 11. Lemme de Lebesgue.

Soit f une fonction réglée sur $[a,b]$. Montrer que :

$$\int_a^b f(t) \mathrm{e}^{int} \,\mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 12. Un théorème de Dini.

Soit deux réels a et b avec $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge simplement vers une fonction f continue sur $[a,b]$. On suppose que pour tout $x \in [a,b]$, la suite $(f_n(x))$ est croissante. Montrer que la convergence est uniforme.