– Chapitre 14 –
Théorème de convergence dominée - Intégrales à paramètre

I. Théorèmes de convergence dominée et d'intégration terme à terme.

I.1. Le théorème de convergence dominée.

Théorème 1. Théorème de convergence dominée.
Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue par morceaux sur I,
2. (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f,
3. f est continue par morceaux sur I,
4. il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leqslant \varphi \qquad \text{(Hypothèse de domination).}$$

Alors la fonction f est intégrable sur I et :

$$\int_I f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f.$$

Autrement-dit :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n.$$

⚠ Prouver l'intégrabilité de f est immédiat. Mais tout l'intérêt de ce théorème réside dans l'interversion entre la limite et l'intégrale.

Exercice 1. Intégrales de Wallis.
Montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n \, \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exemple 1. La suite de fonctions (f_n) définie par $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\frac{x^n}{n!}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle. Le théorème de convergence dominée ne peut s'appliquer sur $[0, +\infty[$.

⚠ Il faut bien noter que, dans l'énoncé du théorème de convergence dominée, l'intervalle d'intégration est fixe. Lorsque l'intervalle d'intégration dépend de n, on pourra parfois contourner cette difficulté en prolongeant la fonction par la fonction nulle.

Exercice 2. Montrer que :
$$\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+u^2/n)^n}\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Grâce à la caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction, on obtient une version à paramètre réel du théorème de convergence dominée :

Théorème 2. Théorème de convergence dominée - Cas d'un paramètre réel.
Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ une famille de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$.
Soit a un point de J ou une borne (éventuellement infinie) de J. Soit f une fonction définie sur I.
On suppose que :
1. $\forall x \in I,\ \lim\limits_{\lambda\to a} f_\lambda(x) = f(x)$,
2. f est continue par morceaux sur I,
3. il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que pour tout λ au voisinage de a :

$$|f_\lambda| \leqslant \varphi \qquad \text{(Hypothèse de domination locale).}$$

Alors la fonction f est intégrable sur I et :

$$\int_I f_\lambda \underset{\lambda\to a}{\longrightarrow} \int_I f.$$

I.2. Le théorème d'intégration terme à terme.

Théorème 3. Théorème d'intégration terme à terme.
Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que :
1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I,
2. la série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction S,
3. S est continue par morceaux sur I,
4. la série $\sum \int_I |f_n|$ converge.
Alors la fonction S est intégrable sur I et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n = \int_I S.$$

Autrement-dit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

Remarque importante.

Exercice 3. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

⚠ L'hypothèse demandée est assez forte : si elle n'est pas satisfaite, on pourra essayer d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles. Ce sera souvent le cas lorsqu'on rencontrera une série de fonctions « alternée ».

Exercice 4. Soit (u_n) une suite croissante de réels strictement positifs qui tend vers l'infini. Montrer l'existence des deux quantités suivantes ainsi que l'égalité :

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \mathrm{e}^{-u_n x}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{u_n}.$$

II. Régularité d'une intégrale à paramètre.

II.1. Continuité d'une intégrale à paramètre.

Théorème 4. Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

1. pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A,

2. pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I,

3. il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant :

$$\forall x \in A, \forall t \in I, \ \ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \qquad \text{(Hypothèse de domination).}$$

Alors la fonction :

$$g : x \mapsto \int_I f(x,t) \ \mathrm{d}t$$

est définie et continue sur A.

Démonstration. On va utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité et le théorème de convergence dominée.

□

Exercice 5. Montrons la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin(xt) \, \mathrm{d}t.$$

⚠ En pratique, lorsque A est un intervalle de $\mathbb{R}$, on pourra se contenter d'une domination sur tout segment inclus dans A. On parle alors de domination locale.

Exercice 6. La fonction gamma d'Euler.

C'est la fonction notée Γ et définie par : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que le domaine de définition de Γ est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

⚠ On peut montrer que la fonction gamma est définie sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$.

On obtient alors que la fonction gamma est continue sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$.

⚠ Lorsque que l'intervalle d'intégration I est un segment, une majoration par une constante suffit puisque les constantes sont intégrables sur un segment.

Exercice 7.

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire la valeur de : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1/n} \frac{n\cos t}{1+n^2t^2}\,\mathrm{d}t$.

⚠ Lorsque que l'intervalle d'intégration I est un segment $[a,b]$. Si la fonction f est continue sur le produit cartésien $A \times [a,b]$ on obtient, localement, une majoration par une constante.

Traitons, par exemple, le cas où A est un intervalle de $\mathbb{R}$.

II.2. Dérivabilité d'une intégrale à paramètre.

Théorème 5. Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

1. pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A,

2. pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I,

3. pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I,

4. il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant :

$$\forall x \in A, \forall t \in I, \ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \qquad \text{(Hypothèse de domination).}$$

Alors la fonction :

$$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et vérifie :

$$\forall x \in A,\ g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration.

$\square$

Exercice 8. La fonction gamma d'Euler.

Montrer que la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

1. pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A,

2. pour tout $x \in A$, et pour tout $p \in [\![0, k-1]\!]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est intégrable sur I,

3. pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I,

4. il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant :

$$\forall x \in A, \forall t \in I, \ \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \qquad \text{(Hypothèse de domination).}$$

Alors la fonction :

$$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A et vérifie, pour tout $p \in [\![0, k]\!]$:

$$\forall x \in A,\ g^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

Exercice 9. Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.