– Chapitre 15 : Rappels sur les espaces préhilbertiens réels –

I. Produit scalaire.

Définition 1. On appelle *produit scalaire* d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, toute forme bilinéaire symétrique, et définie positive.

Notations.
Si φ est un produit scalaire et si $(x, y) \in E^2$, alors le réel $\varphi(x, y)$ sera noté $(x \mid y)$ ou $\langle x, y\rangle$ ou $x \cdot y$.

Exemple 1. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ en posant :

$$\langle x, y\rangle =$$

Ce produit scalaire est appelée, le *produit scalaire canonique* de $\mathbb{R}^n$.
Plus généralement, si $p_1, \ldots, p_n$ sont des réels strictement positifs, on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ en posant :

$$\langle x, y\rangle =$$

Exemple 2. Sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on définit un produit scalaire en posant :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})^2, \quad \langle f, g\rangle = \qquad .$$

Plus généralement, si $p \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est une fonction à valeurs strictement positives, on définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ en posant :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})^2, \quad \langle f, g\rangle = \qquad .$$

Définition 2.
- On appelle *espace préhilbertien réel*, tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
- On appelle *espace euclidien*, tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

Dans toute la suite de ce chapitre E désignera un espace préhilbertien réel. On notera $\langle \cdot, \cdot\rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ le norme euclidienne associée définie par : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Théorème 1. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Pour tout $(x, y) \in E^2$ on a :

ou encore :

Cette inégalité est une égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires.

Proposition 1. Identités de polarisation. Pour tout $(x,y) \in E^2$:

1. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle$

2. $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle$

3. $\langle x,y\rangle = \dfrac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$.

Démonstration.

$\square$

Remarque 1. La propriété 3 permet d'exprimer le produit scalaire uniquement en fonction de la norme euclidienne.
Par conséquent, une norme euclidienne provient d'un unique produit scalaire. Autrement dit, deux produits scalaires différents induisent deux normes euclidiennes différentes.

En ajoutant les lignes 1 et 2 de la proposition précédente, on obtient :

Corollaire 1. Égalité du parallélogramme.
Pour tout $(x,y) \in E^2$: $\quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$.

II. Orthogonalité.

Définition 3.

- Deux vecteurs x et y de E sont dits *orthogonaux* si $\langle x,y\rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.
- Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits *orthogonaux* si tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G, autrement dit si :

$$\forall (x,y) \in F \times G,\ x \perp y.$$

Exercice 1. Dans $\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire vu précédemment, montrer que $\sin \perp \cos$.

Remarque 2. On peut en déduire que les droites vectorielles $\operatorname{Vect}\{\sin\}$ et $\operatorname{Vect}\{\cos\}$ sont orthogonales.

Théorème 2. Théorème de Pythagore.
Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si, et seulement si, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Démonstration.
L'équivalence découle immédiatement de l'égalité : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle$. $\square$

Définition 4.

- On appelle famille orthogonale, toute famille de vecteurs 2 à 2 orthogonaux.
- On appelle famille *orthonormale* ou *orthonormée*, toute famille orthogonale dont les vecteurs sont *normés* i.e. de norme 1.

Exemple 3. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une famille orthonormée pour le produit scalaire canonique. On parle donc de base orthonormée.

Proposition 2. Relation de Pythagore.
Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs de E, alors :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Démonstration.

□

⚠ La réciproque est fausse. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$: .

Proposition 3. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthonormée de E et si $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \; \lambda_i = \langle x, e_i \rangle .$$

Démonstration.

□

⚠ Le vecteur x s'écrit donc $x =$

Corollaire 2. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthonormée de E, alors elle est libre.

Démonstration.

□

Théorème 3. Procédé d'orthonormalisation de Schmidt.
Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille libre d'un espace préhilbertien réel E. Alors, il existe une famille orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$ de E telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \text{Vect}\ \{e_1, \dots, e_i\} = \text{Vect}\ \{f_1, \dots, f_i\}.$$

⚠ Il n'y a pas unicité de la famille $(f_1, \dots, f_n)$. En effet,

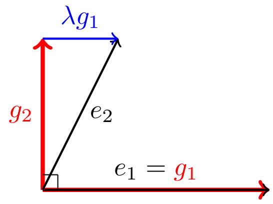
Cependant, la famille orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$ devient unique si l'on impose de plus la condition : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle e_i, f_i \rangle > 0$.

C'est justement, cette famille là que donne le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Remarque importante. Si les premiers vecteurs de la famille sont déjà orthonormés, alors le procédé les conserve.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, orthonormaliser la famille :
$e_1 = (1, 1, 0), \quad e_2 = (1, 2, 0), \quad e_3 = (1, 1, 1).$

⚠ Avant d'orthonormaliser une famille, bien penser à vérifier qu'elle est libre.



III. Bases orthonormées ou orthonormales.

Dans cette partie E désigne un espace euclidien i.e. un espace préhilbertien réel de dimension finie, notée n.

Définition 5. On appelle *base orthonormée* ou *base orthonormale* de E (ou d'un sous-espace vectoriel F de E), toute base de E (ou de F) qui est une famille orthonormée.

Proposition 4. Si $\dim E = n$, et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthonormée de E, alors c'est une base orthonormée de E.

Démonstration. □

Voici une conséquence immédiate du procédé d'orthonormalisation :

Proposition 5. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors il existe une base orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$ de E telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \operatorname{Vect}\{e_1, \dots, e_i\} = \operatorname{Vect}\{f_1, \dots, f_i\}$.

Corollaire 3. Tout espace euclidien admet au moins une base orthonormée.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du fait que tout espace vectoriel de dimension finie admette au moins un base et de la proposition précédente. □

Proposition 6. Toute famille orthonormée de E peut être complétée en une base orthonormée.

Démonstration. □

Proposition 7. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée d'un espace euclidien E, alors :

$$\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle\, e_i.$$

Démonstration. □

Proposition 8. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E. Soit x et y deux vecteurs de coordonnées respectives $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathcal{B}$. Alors :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^\top \cdot Y \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = X^\top \cdot X,$$

où X et Y sont les matrices colonnes constituées des cordonnées de x et y dans $\mathcal{B}$.

Démonstration.

□

On déduit des propositions précédentes que : $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$.

IV. ORTHOGONAL D'UNE PARTIE.

Définition 6. On appelle *orthogonal* d'une partie (quelconque) A de E, l'ensemble noté $A^\perp$ défini par :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\} = \{x \in E \mid \forall a \in A, x \perp a\}.$$

Proposition 9. Pour toute partie A de E, l'ensemble $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

□

Exemple 4. $\{0\}^\perp =$

Exercice 3. Montrer que $E^\perp = \{0\}$.

Proposition 10. Si A et B sont deux parties de E, alors : $A \subset B \;\Rightarrow\; B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

Démonstration.

$\square$

Proposition 11. Pour toute partie A de E, $A^{\perp} = (\text{Vect } A)^{\perp}$.

Démonstration.

$\square$

Rappel. Par définition, deux sous-espaces vectoriels F et G sont dits orthogonaux si tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G.

Exemple 5. Les sous-espaces vectoriels F et $F^{\perp}$ sont orthogonaux.

Proposition 12. Deux sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux si, et seulement si, $F \subset G^{\perp}$; ce qui équivaut encore à : $G \subset F^{\perp}$.

Démonstration.

$\square$

V. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.

Soit E un espaces préhilbertien réel.

Théorème 4. Si F est un sous-espace vectoriel de E et si F est de dimension finie, alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires :

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

Le sous-espace vectoriel $F^{\perp}$ est ainsi appelé le *supplémentaire orthogonal* de F.

Remarque 4. Pour dire que G est le supplémentaire orthogonal de F, on notera :

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}.$$

Remarque importante. Le théorème précédent est vrai en particulier dans le cas où E est un espace euclidien. L'hypothèse « F est de dimension finie » est alors forcément vérifiée.

Dans le cas d'un espace euclidien, on peut, de plus, énoncer :

Proposition 13. Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E, alors :

1. $\dim F^{\perp} + \dim F = \dim E$.

2. $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Démonstration.

$\square$

VI. Projection orthogonale.

Soit E un espaces préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Définition 7.

- On appelle *projection orthogonale* sur F, la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.
- L'image d'un vecteur x de E, par cette projection est appelée le *projeté orthogonal* de x sur F.

Remarque importante. Nommons π la projection orthogonale sur F. On a déjà vu que tout vecteur x de E est la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de $F^{\perp}$. Cette décomposition est donc :

En particulier, $\boxed{}$.

Définition 8. On appelle *symétrie orthogonale* par rapport à F, la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$.

Proposition 14. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F, et si π la projection orthogonale sur F, alors :

$$\forall x \in E,\ \pi(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle\, e_i$$

Démonstration.

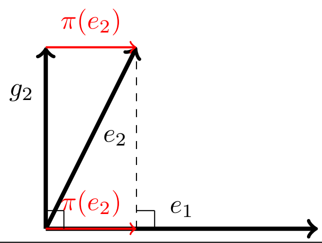
□

Retour sur le procédé d'orthonormalisation.

On a vu qu'on devait poser :

$$g_{p+1} = e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i \quad \text{avec} \quad \lambda_i =$$

ce qui correspond à $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$, où π est la projection orthogonale sur $F = \text{Vect}\,\{e_1, \ldots, e_p\} = \text{Vect}\,\{f_1, \ldots, f_p\}$.



Proposition 15. Soit F un sous-espace vectoriel engendré par une famille quelconque de vecteurs : $(e_1, \ldots, e_p)$, et soit π la projection orthogonale sur F. Pour tout vecteur $x \in E$ et tout $y \in F$, on a :

$$y = \pi(x) \iff \forall i \in [\![1, p]\!],\ \langle x - y, e_i \rangle = 0.$$

Démonstration.

□

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x.$$

Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$, en utilisant la proposition précédente.

VII. Distance à un sous-espace vectoriel.

Rappel. Soit A une partie non vide de E et $x \in E$. On appelle distance de x à A, le nombre :

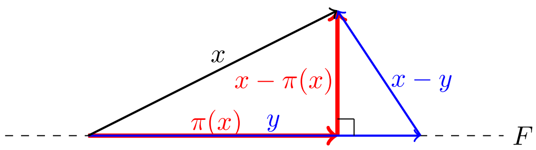
$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = \inf_{a \in A} \|x - a\| = \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}.$$

Théorème 5. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, soit π la projection orthogonale sur F, et soit $x \in E$.
Alors la distance de x à F est atteint en un unique élément de F qui est : $\pi(x)$.

1. $d(x, F) = \|x - \pi(x)\|$.

2. $\forall y \in F,\ d(x, F) = \|x - y\| \Leftrightarrow y = \pi(x)$.

Démonstration.



$\square$

Exercice 5. En reprenant le produit scalaire de $\mathbb{R}[X]$ défini dans l'exercice précédent, calculer :

$$m = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \mathrm{d}x.$$

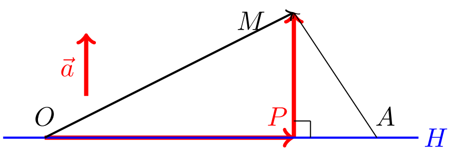
VIII. Distance à un hyperplan d'un espace euclidien.

Proposition 16. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E, A un point de $\mathcal{H}$, et $\vec{a}$ un vecteur normal à $\mathcal{H}$. Alors pour tout point M de E :

$$d(M, \mathcal{H}) = \frac{|\vec{a}\cdot\overrightarrow{AM}|}{\|\vec{a}\|}.$$

Démonstration.

- Cas particulier où $\mathcal{H}$ est un hyperplan vectoriel i.e. $\mathcal{H} = H$.



On a déjà prouvé que : $d(M, H) = \|\overrightarrow{PM}\|$, où P est le projeté orthogonal de M sur H.

On sait que $\overrightarrow{PM} \in H^\perp$ et $H^\perp$ est la droite engendrée par $\vec{a}$.

Il existe donc un réel α tel que $\overrightarrow{PM} = \alpha\vec{a}$. Donc, $d(M, H) = |\alpha|\|a\|$

Donc : $\vec{a}\cdot\overrightarrow{AM} = \underbrace{\vec{a}\cdot\overrightarrow{AP}}_{=0} + \vec{a}\cdot\overrightarrow{PM}$ $\qquad (\vec{a}\cdot\overrightarrow{AP} = 0$ car $\vec{a} \in H^\perp$ et $\overrightarrow{AP} \in H)$

$= \vec{a}\cdot(\alpha\vec{a}) = \alpha\|a\|^2.$

Ainsi, $|\vec{a}\cdot\overrightarrow{AM}| = |\alpha|\|a\|^2 = \|\vec{a}\|\, d(M, H)$.

- Dans le cas général, où $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine, on se ramène au cas précédent par translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.

$\square$