– TD 13 : Séries entières. –

Exercice 1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum (-1)^n a_n z^n$?

2. Donner un exemple de suite (a_n), pour lequel $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ n'ont pas le même domaine de convergence.

Exercice 2. La règle de d'Alembert.

Le but de cet exercice, est de donner un contre-exemple à la réciproque de la règle de d'Alembert. Pour ce faire, on considère la suite (a_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = a_{2n+1} = \frac{1}{2^n}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

2. Prouver la divergence de la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$.

Exercice 3. Convergence uniforme.

Le but de cet exercice, est de donner un contre-exemple à la convergence uniforme sur le disque ouvert de convergence, noté $D(0, R)$. Pour ce faire, on considère la série entière $\sum z^n$.

1. Rappeler son rayon de convergence, noté R.

2. Prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $D(0, R)$.

Exercice 4. Soit a_n le n-ème chiffre dans le développement décimal de π : $a_0 = 3, a_1 = 1, a_2 = 4$.
Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exercice 5. Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\sum \frac{n^2+1}{3^n} z^n, \qquad \sum \mathrm{e}^{-n^2} z^n, \qquad \sum \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}, \qquad \sum \frac{n^n}{n!} z^{3n}.$$

Exercice 6. Un cas particulier du théorème d'Hadamard.

Soit (a_n) une suite telle que $\sqrt[n]{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ vérifie $R = \frac{1}{\ell}$ avec les conventions habituelles dans le cas où $\ell \in \{0, +\infty\}$.

Exercice 7. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1} d_n z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1} s_n z^n,$$

où d_n et s_n désignent respectivement le nombre et la somme des diviseurs supérieurs à 1 de l'entier n.

Exercice 8. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière :

$$\sum \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) z^n.$$

Exercice 9. Déterminer le rayon de convergence de la série entière : $\sum \dfrac{n^n}{n!} z^{3n}$.

Exercice 10. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n^2 z^n$.

Exercice 11. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Déterminer le rayon de convergence de $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$.

Exercice 12. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On pose : $b_n = \dfrac{a_n}{1+|a_n|}$ et on note R' le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$.
1. Montrer que $R' \geqslant \max(1, R)$.
2. Établir que si $R' > 1$ alors $R' = R$.
3. Montrer que $R' = \max(1, R)$.

Exercice 13. Déterminer le rayon de convergence de la série entière : $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) z^n$.

Exercice 14. Déterminer un développement en série entière au voisinage 0 des fonctions suivantes :
1. $f : x \mapsto \ln(1 + x - 2x^2)$,
2. $g : x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$.

Exercice 15. Prouver l'existence d'un développement en série entière au voisinage 0 pour la fonctions f définie par : $f(x) = \frac{1}{1-\mathrm{sh}\, x}$.

Exercice 16. Déterminer, par la méthode de l'équation différentielle, le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction définie par : $f(x) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 17. Déterminer, par la méthode de l'équation différentielle, le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction définie par : $f(x) = \mathrm{sh}\,(\arcsin x)$.

Exercice 18. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t.$$

1. Étudier la parité de f.
2. Déterminer, par la méthode de l'équation différentielle, son DSE au voisinage de 0.

Exercice 19. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ se prolonge à $\mathbb{R}$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 20. Formule de Cauchy - Théorème de Liouville.
On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$ et de somme S.
1. Montrer que pour tout réel r tel que $0 < r < R$, et tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n r^n = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} S(r\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{-in\theta}\, \mathrm{d}\theta$.
2. On suppose maintenant que $R = +\infty$ et que S est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que S est constante.