

– Programme de colle n° 14 : du 12 au 16/01 –

Les questions de cours portent sur tout ce qui suit.

Les exercices portent sur les séries entières, et les séries de fonctions.

⚠ On ne posera pas de développement en série entière cette semaine.

Les démonstrations à connaître sont indiquées par le symbole 

– CHAPITRE 14 –

THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE - INTÉGRALES À PARAMÈTRE

⚠ Cours uniquement.

⚠ Ces 5 théorèmes sont à connaître parfaitement :

- théorème de convergence dominée,
- théorème d'intégration terme à terme,
- théorème de continuité d'une intégrale à paramètre
- théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre (version \mathcal{C}^1)
- théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre (version \mathcal{C}^k).

I. THÉORÈMES DE CONVERGENCE DOMINÉE ET D'INTÉGRATION TERME À TERME.

I.1. Le théorème de convergence dominée.

Savoir montrer que (corrigé page suivante) :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+u^2/n)^n} du \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du. \quad \text{☞}$$

I.2. Le théorème d'intégration terme à terme.

Savoir montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}. \quad \text{☞}$$

II. RÉGULARITÉ D'UNE INTÉGRALE À PARAMÈTRE.

II.1. Continuité d'une intégrale à paramètre. 

Continuité de la fonction gamma d'Euler sur \mathbb{R}_+^* . 

II.2. Dérivabilité d'une intégrale à paramètre.

Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre (version \mathcal{C}^1).

Savoir montrer que la fonction gamma d'Euler est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* . 

Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre (version \mathcal{C}^k).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, par :

$$f_n(u) = \begin{cases} \frac{1}{(1+u^2/n)^n} & \text{si } u \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On va utiliser le théorème de convergence dominée.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ .

2. Soit $u > 0$. On a :

$$f_n(u) = \exp(-n \ln(1+u^2/n)) \text{ et } -n \ln(1+u^2/n) \underset{+\infty}{\sim} -nu^2/n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} -u^2.$$

Ainsi, par continuité de \exp , on a $f_n(u) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} e^{-u^2}$ (valable également pour $u = 0$)

Ainsi (f_n) converge simplement vers $u \mapsto e^{-u^2}$ sur \mathbb{R}_+ .

3. La fonction $u \mapsto e^{-u^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in [0, \sqrt{n}]$, on a avec la formule du binôme :

$$(1+u^2/n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{u^{2k}}{n^k} \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \frac{u^2}{n} = 1 + u^2 > 0.$$

Ce qui permet d'établir l'hypothèse de domination : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in [0, +\infty[, |f_n(u)| \leq \frac{1}{1+u^2}$.

Or la fonction $u \mapsto \frac{1}{1+u^2}$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, le théorème de convergence dominée s'applique et on obtient :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+u^2/n)^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$