– Chapitre 16 : Endomorphismes d'un espace euclidien –

Dans tout ce chapitre, E désignera un espace euclidien et $\|.\|$ la norme euclidienne.

I. Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.

I.1. Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien.

Exercice 1. Soit $(a,b)\in E^2$. On suppose que : $\forall x\in E,\ \langle a,x\rangle = \langle b,x\rangle$. Montrer que $a=b$.

Pour tout $a\in E$, on note φ_a l'application :

$$\varphi_a \ : \ \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle a,x\rangle \,. \end{array}$$

Le produit scalaire étant bilinéaire, on obtient que $\varphi_a\in E^*$ i.e. que φ_a est une forme linéaire sur E. Le théorème de représentation de Riesz nous dit que réciproquement, toute forme linéaire est de la forme φ_a pour un unique $a\in E$.

Théorème 1. Théorème de représentation de Riesz.
Pour toute forme linéaire f de E, il existe un unique $a\in E$ tel que $f=\varphi_a$ i.e. tel que :

$$\forall x\in E,\ f(x)=\langle a,x\rangle\,.$$

Démonstration.

$\square$

On verra une démonstration plus efficace en TD.

Corollaire 1. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, et soit a un vecteur non nul de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Soit H une partie de E. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $H = \text{Ker } \varphi_a$,

2. $H = \{x \in E \mid \langle a, x \rangle = 0\}$,

3. H a pour équation dans $\mathcal{B}$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$.

Dans chacun de ces 3 cas, on obtient que H est un hyperplan vectoriel de E, et a est alors appelé *vecteur normal* à H.

⚠ Si $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine dirigé par un hyperplan vectoriel H, on appelle vecteur normal à $\mathcal{H}$ tout vecteur normal à H.

I.2. Définition de l'adjoint d'un endomorphisme.

Proposition 1. Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme de E, noté u^* vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x, u(y) \rangle = \langle u^*(x), y \rangle .$$

Cet endomorphisme u^* est appelé l'*adjoint* de u.

Démonstration.

□

Exemple 1. $0_{\mathcal{L}(E)}{}^* =$

$\text{Id}_E^* =$

Proposition 2. L'application $u \mapsto u^*$ est une symétrie de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.

Autrement-dit, l'application $u \mapsto u^*$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ et c'est une application involutive : $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ (u^*)^* = u$.

⚠ On obtient donc que l'application $u \mapsto u^*$ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration.

□

Proposition 3. Pour tout $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2,\ (v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.

Démonstration.

□

Corollaire 2. Si u est un automorphisme de E, alors u^* est un automorphisme de E, et l'on a :

$$(u^*)^{-1} = \left(u^{-1}\right)^*.$$

Démonstration.

□

Matrice de l'adjoint en base orthonormée.

Proposition 4. Pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, on a :

$$M_{\mathcal{B}}(u^*) = M_{\mathcal{B}}(u)^{\top}.$$

Démonstration.

□

Corollaire 3. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Alors u^* est l'endomorphisme canoniquement associé à A^T.

Démonstration.

□

Corollaire 4. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$\mathrm{tr}\ u^* = \mathrm{tr}\ u, \qquad \mathrm{rg}\ u^* = \mathrm{rg}\ u, \qquad \det u^* = \det u \quad \text{et} \quad \chi u^* = \chi u.$$

Démonstration.

□

Corollaire 5. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$\mathrm{Ker}\ u^* = \big(\mathrm{Im}\ u\big)^\perp \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\ u^* = \big(\mathrm{Ker}\ u\big)^\perp.$$

Démonstration.

□

Proposition 5. Si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Démonstration.

□

Soit E un espace euclidien dont on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. On rappelle que l'on peut définir la norme subordonnée à $\|\cdot\|$ sur l'algèbre $\mathcal{L}(E)$, en posant, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$|||u||| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

Exercice 2. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$: $|||u||| = |||u^*|||$.

II. Isométries vectorielles. Matrices orthogonales.

II.1. Isométries vectorielles d'un espace euclidien.

Définition 1. On appelle *isométrie vectorielle* de E, tout endomorphisme u de E conservant la norme, i.e. vérifiant :

$$\forall x \in E, \ \|u(x)\| = \|x\|.$$

Exemple 2. Id_E et -Id_E sont des isométries vectorielles de E.

Définition 2. On appelle *automorphisme orthogonal* de E, tout endomorphisme u de E conservant le produit scalaire, i.e. vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2, \ \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle .$$

Proposition 6. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, u est un automorphisme orthogonal si, et seulement si, u est une isométrie vectorielle.

⚠ Conformément au programme, nous utiliserons de préférence l'expression « isométrie vectorielle ».

Démonstration.

□

Proposition 7. Les isométries vectorielles sont des automorphismes de E.

Démonstration.

□

⚠ On comprend mieux pourquoi les isométries vectorielles sont aussi appelées automorphismes orthogonaux.

Plus précisément :

Proposition 8. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$(u \text{ est une isométrie vectorielle}) \Leftrightarrow (u \text{ est un automorphisme de } E \text{ et } u^{-1} = u^*).$$

Démonstration.

□

Proposition 9. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. u est une isométrie vectorielle,

2. pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, l'image de $\mathcal{B}$ par u est une base orthonormée de E,

3. il existe une base orthonormée de E dont l'image par u est une base orthonormée de E,

Démonstration.

$\square$

Exercice 3. Soit u une symétrie de E. Montrer que u est une isométrie vectorielle, si, et seulement si, c'est une symétrie orthogonale.

Exercice 4. Une projection peut-elle être une isométrie vectorielle ?

II.2. Groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$.

Proposition 10.

- La composée de deux isométries vectorielles de E est une isométrie vectorielle de E.
- La réciproque d'une isométrie vectorielle de E est une isométrie vectorielle de E.

Par conséquent, l'ensemble noté $\mathcal{O}(E)$, des isométries vectorielles de E est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$. $\mathcal{O}(E)$ est appelé le *groupe orthogonal* de E.

□

II.3. Matrices orthogonales.

Proposition 11. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $M^\top M = \mathrm{I}_n$.

2. $MM^\top = \mathrm{I}_n$.

3. M est inversible et $M^{-1} = M^\top$.

4. les colonnes de M forment une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$).

5. les lignes de M forment une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$).

Une matrice vérifiant l'une de ces 5 propriétés équivalentes est dite *orthogonale*.

Exemple 3.

- I_n est une matrice orthogonale
- $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale. Ainsi : $M^{-1} =$

Démonstration.

□

Proposition 12. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Une base $\mathcal{B}'$ de E est orthonormée si, et seulement si, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, est orthogonale.

Démonstration.

□

Proposition 13. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors, $u \in \mathcal{O}(E)$ si, et seulement si, $M_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice orthogonale.

Démonstration.

□

Proposition 14. L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.
Il est noté $\mathcal{O}(n)$ ou $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et est appelée le *groupe orthogonal*.

Démonstration.

□

II.4. Groupe spécial orthogonal.

Exercice 5.
1. Quel est le déterminant d'une matrice orthogonale $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$?
2. Quel est le déterminant d'une isométrie $u \in \mathcal{O}(E)$?

Définition 3.
- Une matrice orthogonale est dite *positive* si son déterminant vaut 1, et *négative* s'il vaut -1.
- Une isométrie vectorielle est dite *positive* ou *directe* si son déterminant vaut 1, et *négative* ou *indirecte* s'il vaut -1.

Proposition 15. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :
- u est une isométrie positive si, et seulement si, $M_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice orthogonale positive,
- u est une isométrie négative si, et seulement si, $M_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice orthogonale négative.

Démonstration.

$\square$

⚠ Ceci ne dépend pas du choix de l'orientation de la base orthonormée $\mathcal{B}$ de E.

Proposition 16.
- L'ensemble des matrices positives de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ forment un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, appelée le *groupe spécial orthogonal.* Il est noté $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{SO}(n)$.
- L'ensemble des isométries directes de $\mathcal{O}(E)$ forment un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$, appelée le *groupe spécial orthogonal.* Il est noté $\mathcal{SO}(E)$.

Démonstration.

$\square$

Définition 4. On appelle *réflexion* une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Proposition 17. Les réflexions sont des isométries indirectes.

Démonstration.

□

Rappel. Orienter l'espace E c'est choisir une base de référence $\mathcal{B}_0$ de E. Alors, les bases $\mathcal{B}$ de E vérifient toutes :

$$\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0 \quad \text{ou} \quad \det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) < 0.$$

Dans le premier, cas, on dit que $\mathcal{B}$ est une *base directe*, et dans le second cas, que $\mathcal{B}$ est une *base indirecte*.

Exemple 4. Si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base directe de E, alors $(-e_1, e_2, \ldots, e_n)$ en est une base indirecte.

Exercice 6. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base directe de E. Montrer que $(e_1 - e_2, e_1 + e_2)$ une base de E, et donner son orientation.

Proposition 18. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E.
Une base $\mathcal{B}'$ de E est orthonormée directe si, et seulement si, la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, est orthogonale positive, i.e. si, et seulement si, $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

□

Corollaire 6. Soit $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E, et soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes de E. Alors, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F})$.

Démonstration.

□

⚠ En régle générale, le déterminant d'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs dans une base $\mathcal{B}$, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ dépend du choix de la base $\mathcal{B}$. Mais on vient de voir ici que la valeur de $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ sera la même quel que soit le choix d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}$.

III. Isométrie vectorielle en dimension 2.

Soit E un plan euclidien i.e. un espace euclidien de dimension 2.

III.1. Matrices orthogonales 2×2.

Proposition 19. L'ensemble $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrice de la forme :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$. On a de plus : $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

Démonstration.

□

Proposition 20. L'application :

$$\begin{array}{rccc} R & : & (\mathbb{R}, +) & \to & (\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times) \\ & & \theta & \mapsto & R(\theta) \end{array}$$

est un morphisme de groupes surjectif et de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration.

□

Corollaire 7. Le groupe $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{U}, \times)$.

Démonstration.

$\square$

Remarque importante. On en déduit que $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe abélien.

III.2. Isométrie directe en dimension 2.

Proposition 21. Si r est une isométrie directe d'un un plan euclidien E, alors il existe un réel θ unique modulo 2π tel que dans n'importe quelle base orthonormée directe de E, la matrice de r soit $R(\theta)$.
On dit alors que r est la *rotation* d'angle θ.

Démonstration.

□

Remarque importante. Ce résultat reste vrai dans une base orthonormée indirecte ; la seule chose qui change sera la valeur de θ. En effet :

Proposition 22. Si E est un plan euclidien, le groupe $(\mathcal{SO}(E), \circ)$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{U}, \times)$.

Démonstration. Conséquence immédiate du fait que le groupe $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ est isomorphe au $(\mathbb{U}, \times)$. □

Remarque 3. On en déduit que $(\mathcal{SO}(E), \circ)$ est un groupe abélien.

On suppose que que le plan euclidien E est orienté.

Proposition 23. Si x et y sont deux vecteurs non nuls, il existe une unique rotation r telle que $r\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{y}{\|y\|}$.
On appelle *mesure de l'angle orienté* (x, y) toute mesure de r.

Démonstration.

□

Proposition 24. Relation de Chasles.
Si x, y et z sont trois vecteurs non nuls, alors :

Démonstration.

□

Proposition 25. Si θ est une mesure de l'angle orienté (x, y) où x et y sont deux vecteurs normés, alors :

$$\cos\theta = \qquad\qquad\qquad \sin\theta =$$

où $\mathcal{B}$ désigne une bond quelconque de E.

Démonstration.

□

III.3. Isométrie indirecte en dimension 2.

Proposition 26. Les isométries indirectes d'un plan euclidien E sont les réflexions.

Démonstration.
On a déjà vu que toute réflexion est une isométrie indirecte.
Réciproquement, soit s une isométrie indirecte, et soit $\mathcal{B}$ une bon quelconque de E.

$\square$

Exercice 7. Déterminer l'axe d'une réflexion dont la matrice dans une bon (e_1, e_2) est $S(\theta)$.

Proposition 27. (Hors programme). Toute rotation d'un plan euclidien E est la composée de deux réflexions. De plus, la première réflexion peut être choisie arbitrairement, et l'axe de la deuxième se déduit de l'axe de la première, par une rotation d'angle moitié.

Démonstration.

□

IV. Réduction des isométries vectorielles.

Proposition 28. L'endomorphisme induit sur un sous-espace vectoriel stable F par une isométrie vectorielle u est aussi une isométrie vectorielle.

Démonstration. La conservation de la norme reste vraie par restriction à un sous-espace stable. □

Proposition 29. Si F est un sous-espace vectoriel stable par une isométrie vectorielle u, alors $F^{\perp}$ est également stable par u.

Démonstration.

□

Exercice 8. Soit u isométrie vectorielle. Que peut-on dire du spectre de u ? Montrer que les sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux.

Retour sur la dimension 2.

Exercice 9. Pour quelles valeurs de θ les matrices $R(\theta)$ et $S(\theta)$ sont-elles diagonalisables ?

En dimension 3.

Proposition 30. Soit $u \in \mathcal{SO}(E)$ où E est un espace euclidien de dimension 3. Alors, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et un réel θ tels que :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

$\square$

Corollaire 8. Si $u \in \mathcal{SO}(E)$ où E est un espace euclidien de dimension 3, alors il existe une droite stable D et un plan stable P orthogonal à D tels que $u_D = \mathrm{Id}_D$ et tel que u_P soit une rotation.

Remarque 4. Pour cette raison, comme en dimension 2, un élément u de $SO(E)$ est appelé rotation d'angle θ. Connaissant u, comment peut-on déterminer θ ?

Proposition 31. Soit $u \in \mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{SO}(E)$ où E est un espace euclidien de dimension 3. Alors, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et un réel θ tels que :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

□

Cas général.

Lemme. Tout endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$ possède une droite ou un plan stable par u.

Démonstration.

□

Théorème 2. Soit u une isométrie vectorielle. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est égale à une matrice diagonale par blocs avec des blocs diagonaux :

- de taille 1 de la forme (α) avec $\alpha \in \{-1, 1\}$,
- de taille 2 et de la forme : $R(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Dans une telle base orthonormée, $M_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & & & & \\ & -\mathrm{I}_q & & & \\ & & R(\theta_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R(\theta_r) \end{pmatrix}$$

⚠ En munissant $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, toute matrice orthogonale est orthogonalement semblable (i.e. avec matrice de passage orthogonale) à une matrice de la forme précédente.

Démonstration.

□

V. Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien.

V.1. Définitions et premières propriétés.

Définition 5. On dit qu'un endomorphisme u est *autoadjoint* (ou *symétrique*) si $u^* = u$, i.e. si :
$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x, u(y)\rangle = \langle u(x), y\rangle .$$

Notation. On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E.

Proposition 32. L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration.

□

Proposition 33. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors, u est autoadjoint si, et seulement si, $M_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice symétrique.
Autrement-dit, $u \in \mathcal{S}(E)$ si, et seulement si, $M_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

On comprend maintenant pourquoi les endomorphismes autoadjoints sont aussi appelés endomorphismes symétriques.

⚠ On rappelle que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Corollaire 9. En notant $n = \dim E$, on obtient que $\dim \mathcal{S}(E) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration.

□

Proposition 34. Un projecteur de E est un projecteur orthogonal si, et seulement s'il est autoadjoint.

Démonstration.

□

V.2. Réduction des endomorphismes autoadjoints.

Proposition 35. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et F un sous-espace vectoriel stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u.

Démonstration.

□

Proposition 36. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et F un sous-espace vectoriel stable par u. Alors l'endomorphisme induit u_F est autoadjoint.

Démonstration.

□

Proposition 37. Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont 2 à 2 orthogonaux.

Démonstration.

□

Théorème 3. Théorème spectral. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. u est autoadjoint,

2. $E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)}} E_\lambda(u)$,

3. il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u.

Lemme. Tout endomorphisme autoadjoint u d'un espace euclidien E de dimension 1 ou 2 possède au moins une valeur propre.

Démonstration.

□

Démonstration du théorème spectral.

$\square$

Interprétation matricielle.

Théorème 4. Théorème spectral. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique si, et seulement si, elle est orthogonalement diagonalisable (i.e. diagonalisable avec matrice de passage orthogonale).

⚠ Le résultat est faux pour une matrice à coefficients complexes.

Exercice 10. Montrer que la matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 11. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que : $A = PDP^\top$.

V.3. Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs.

Définition 6. Soit u un endomorphisme autoadjoint de E.

- On dit que u est autoadjoint *positif* si : $\forall x \in E,\ \langle x, u(x)\rangle \geqslant 0$.
- On dit que u est autoadjoint *défini positif* si : $\forall x \in E \setminus \{0\},\ \langle x, u(x)\rangle > 0$.

Notations. L'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs de E est noté $\mathcal{S}^+(E)$; celui des endomorphismes autoadjoints définis positifs $\mathcal{S}^{++}(E)$.

Remarque 5.

Proposition 38. Caractérisation spectrale.
Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. On a alors :

$$u \in \mathcal{S}^+(E) \Leftrightarrow \mathrm{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+ \qquad \text{et} \qquad u \in \mathcal{S}^{++}(E) \Leftrightarrow \mathrm{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

Démonstration.

$\square$

Définition 7. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- On dit que A est une matrice symétrique *positive* si :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \langle x, Ax\rangle \geqslant 0.$$
- On dit que A est une matrice symétrique *définie positive* si :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \langle x, Ax\rangle > 0.$$

Notations. L'ensemble des matrices symétriques positives est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$; celui des matrices symétriques définies positives $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

⚠ On a la même caractérisation spectrale que pour les endomorphismes.

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Montrer que : $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (\mathrm{tr}A > 0 \text{ et } \det A > 0)$.