– TD 14 –
Théorème de convergence dominée - Intégrales à paramètre

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$ on pose $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, $|f_n(x)| \leqslant 1$.

2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x.$$

Exercice 3. Montrer que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4. Calcul de l'intégrale de Gauss (1).

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que g est dérivable et exprimer g' en fonction de f et f'.

2. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 5. Calcul de l'intégrale de Dirichlet.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f et g sont continues sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elles vérifient l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}.$$

3. Montrer que f et g ont une limite nulle en $+\infty$. Que peut-on en déduire sur f et g ?

4. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 6. Montrer l'égalité suivante à l'aide du théorème de convergence dominée :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Exercice 7. Calcul de l'intégrale de Gauss (2).
Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et exprimer $f'(x)$.
2. Calculer $f(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. On note g l'application définie par $g(x) = f(x^2)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g(x) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

4. Conclure que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 8. Fonction Gamma d'Euler.
On rappelle la définition de la fonction Γ d'Euler ; on a déjà prouvé qu'elle était de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\Gamma(x+1) = \Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.
2. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que :

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

4. En déduire que :

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Exercice 9. Donner un développement asymptotique à deux termes de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+n}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10. Fonction de Bessel.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \int_0^x \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$.
3. En déduire que f est développable en série entière.