– TD 15 : Espaces préhilbertiens. –

Exercice 1. Démonstration géométrique de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Soit x et y deux vecteurs d'un espace préhilbertien. On suppose y non nul.
1. Déterminer le projeté orthogonal de x sur la droite engendrée par y.
2. Calculer $\|x\|^2$ en utilisant le théorème de Pythagore.
3. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz, avec le cas d'égalité.

Exercice 2. On considère l'ensemble :

$$A = \left\{ \int_0^{\pi} \left(\mathrm{e}^x - a\cos x - b\sin x \right)^2 \mathrm{d}x \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Montrer que A admet un minimum et le calculer.

Exercice 3. Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire : $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4. Pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2$, on pose :

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^{\mathsf{T}}B).$$

1. Prouver efficacement qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
On se place maintenant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire précédent.
2. Dans cette question $n = 2$. On considère : $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

  a. Déterminer une base orthonormée de $F^{\perp}$.
  b. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer le projeté orthogonal de J sur $F^{\perp}$.
  c. En déduire la distance de J à F.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle.

  a. Montrer que H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  b. Montrer que I_n est normal à H, et en déduire la distance de J à H où J désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 5. On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire de l'exercice précédent. Orthonormaliser la famille :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soit p un projecteur d'un espace euclidien E. Montrer que p est une projection orthogonale si, et seulement si :

$$\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Exercice 7. Théorème de représentation de Riesz.
Soit E espace euclidien. Pour $a \in E$, on note φ_a la forme linéaire :

$$\varphi_a \quad : \quad \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle a, x \rangle \, . \end{array}$$

On veut montrer que pour toute forme linéaire f de E, il existe un unique $a \in E$ tel que $f = \varphi_a$ i.e. que l'application :

$$\varphi \quad : \quad \begin{array}{ccc} E & \to & E^* \\ a & \mapsto & \varphi_a, \end{array}$$

est une bijection. *Indication : on pourra commencer par démontrer que φ est linéaire.*

Exercice 8.

1. Soit E espace préhilbertien et soit $a \in E$. Montrer que la forme linéaire φ_a définie dans l'exercice précédent est continue et déterminer sa norme d'opérateur.

⚠ On ne fait pas ici, l'hypothèse d'être en dimension finie.

2. On munit de $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par : $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que la forme linéaire d'évaluation en 1 définie par $\varphi(P) = P(1)$ n'est pas continue. Qu'en déduit-on concernant le théorème de représentation de Riesz ?

Exercice 9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et φ une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = \mathrm{Tr}\,(AM)$.