

– TD 14 –

Théorème de convergence dominée - Intégrales à paramètre

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$ on pose $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, $|f_n(x)| \leq 1$.

2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

Exercice 2. Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx.$$

Exercice 3. Montrer que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Exercice 4. Calcul de l'intégrale de Gauss (1).

Soit f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que g est dérivable et exprimer g' en fonction de f et f' .

2. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 5. Calcul de l'intégrale de Dirichlet.

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R}_+ par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$$

1. Montrer que f et g sont continues sur \mathbb{R}_+ .

2. Montrer que f et g sont de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et qu'elles vérifient l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}.$$

3. Montrer que f et g ont une limite nulle en $+\infty$. Que peut-on en déduire sur f et g ?

4. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 6. Montrer l'égalité suivante à l'aide du théorème de convergence dominée :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Exercice 7. Calcul de l'intégrale de Gauss (2).

Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}_+ et exprimer $f'(x)$.
2. Calculer $f(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. On note g l'application définie par $g(x) = f(x^2)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

4. Conclure que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 8. Fonction Gamma d'Euler.

On rappelle la définition de la fonction Γ d'Euler ; on a déjà prouvé qu'elle était de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* :

$$\forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.
2. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que :

$$\forall x > 0, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

4. En déduire que :

$$\forall x > 0, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

Exercice 9. Donner un développement asymptotique à deux termes de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+n} dt$.

Exercice 10. Fonction de Bessel.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta.$$

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$.
3. En déduire que f est développable en série entière.