– TD 16 : Endomorphismes d'un espaces euclidien. –

E désigne un espace euclidien.

Exercice 1. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 2. Soit p un projecteur de E et s une symétrie de E.
1. Que peut-on dire de p^* et de s^* ?
2. Montrer que $\text{Ker } (p+p^*) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } p^*$.
3. Montrer que $p+p^*$ est inversible si, et seulement si, $\text{Im } p + \text{Im } p^* = E$.

Exercice 3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer les équivalences suivantes :
1. $u \circ u^* = u^* \circ u$,
2. $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle u^*(x), u^*(y)\rangle$.
3. $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Exercice 4. On pose $E = \mathcal{C}([0,1])$ que l'on munit du produit scalaire : $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
Pour $f \in E$, on note F la primitive de f qui s'annule en 0 : $\forall x \in [0,1],\ F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
On considère l'endomorphisme u de E défini par $u(f) = F$. Déterminer l'adjoint u^* de u.

Exercice 5. Déterminer toutes les applications $u \in \mathcal{O}(E)$ ayant $(X-1)^2$ pour polynôme annulateur.

Exercice 6. Soit u une isométrie de E et $v = u - \mathrm{Id}_E$.
1. Montrer que $\text{Ker } v = (\text{Im } v)^\perp$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit : $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k$.
2. Montrer que, pour tout $x \in E$, la suite $(u_n(x))$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\text{Ker } v$.

Exercice 7. On suppose l'espace euclidien E orienté. Soit u l'endomorphisme de E dont la matrice dans une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que u est une rotation dont on donnera l'axe et une mesure de l'angle au signe près.

Exercice 8. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de rang 1 et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
1. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que M est de rang 1 si, et seulement si, il existe une matrice colonne et une matrice ligne telles que : $M = CL$.
2. Montrer l'inégalité : $\displaystyle\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 \geqslant 1$, et étudier le cas d'égalité.

Exercice 9. Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $A^2 = \mathrm{I}_n$, et montrer que toutes les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

Exercice 10. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer les hyperplans de E stables par u^*.

Exercice 11. Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E.
On pose : $k = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|$. Montrer que : $|||u||| = k$.

Exercice 12. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E vérifiant : $\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0$.

1. L'endomorphisme u est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?

2. On suppose de plus que u est autoadjoint. Monter que u est l'endomorphisme nul.

Exercice 13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^\top A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 14. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A^4 = -2A^3 - 2A^2$. Montrer que $A = 0$.

Exercice 15. On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $\varphi\big(P(X)\big) = P(-X)$. Montrer que φ est une symétrie orthogonale.

Exercice 16. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il n'est pas connexe par arcs.

Exercice 17.

1. Soit $\mathcal{B}$ une base d'un espace euclidien E et soit $\mathcal{C}$ l'orthonormalisée de Schmidt de $\mathcal{B}$. Que dire de la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$?

2. On note $T_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaires supérieures, à coefficients diagonaux strictement positifs. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(O, T) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times T_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = OT$.

3. Que peut-on dire dans le cas où A est une matrice non inversible ?

Exercice 18. Soit p et q des projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E de dimension $n \geqslant 1$.

1. Montrer que $p \circ q \circ p$ est diagonalisable.

2. Déterminer $\big(\mathrm{Im}\ p + \mathrm{Ker}\ q\big)^\perp$.

3. En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable.

4. Établir que les valeurs propres de $p \circ q$ sont comprises entre 0 et 1.

Exercice 19. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle *racine carrée* de A tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $B^2 = A$.

1. On suppose ici $n = 2$. Déterminer toutes les racines carrées de I_2 appartenant à $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^+ = \{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^\top M X \geqslant 0\}$.

2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^+$. Déterminer toutes les racines carrées de A appartenant à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^+$.

Exercice 20. Matrices de Gramm.
Soit E un espace euclidien de dimension p et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.
On appelle *matrice de Gramm* associée à une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $\langle x_i, x_j\rangle$. On la note $G(x_1, \ldots, x_n)$.

1. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, et A la matrice de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $G(x_1, \ldots, x_n) = A^\top A$.

2. Montrer que $G(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^+$. À quelle condition est-elle définie positive ?

3. Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^+$ telle que $\mathrm{rg}\ A \leqslant p$ est la matrice de Gram d'une famille de n vecteurs de E.