– Programme de colle n° 17 : du 2 au 6 février –

Les questions de cours portent sur tout ce qui suit.

Pour les exercices : espaces préhilbertiens réels, orthogonal d'une partie, supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension finie, projection orthogonale sur un sev de dimension finie, distance à un sev de dimension finie, théorème de représentation de Riesz.
En deuxième exercice seulement, on pourra poser un exercice sur : l'adjoint, les isométries vectorielles, les endomorphismes autoadjoints, le théorème spectral.

– Chapitre 17 : Ensembles dénombrables et familles sommables –

⚠ Cours uniquement.

I. Ensembles finis et dénombrement (rappels).

I.1. Notion d'ensembles finis.

I.2. Applications d'un ensemble fini dans un autre.

I.3. Dénombrement.

Dénombrement des p-listes ou p-uplets.
Dénombrement des injections d'un ensemble fini dans un autre. Arrangements.
Dénombrement des permutations.
Dénombrement des combinaisons.
Égalité de Pascal (démonstration par dénombrement). ✎
Identité d'absorption - Formule du pion (démonstration par dénombrement). ✎

II. Notion d'ensembles dénombrables.

II.1. Ensembles dénombrables.

$\mathbb{Z}$ est un ensemble dénombrable.

Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.

Plus généralement, les parties infinies de n'importe quel ensemble dénombrable sont dénombrables.

L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. ✎

Le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

⚠ Le résultat est faux pour un produit infini d'ensembles dénombrables.

II.2. Ensembles au plus dénombrables.

Les affirmations suivantes sont équivalentes : ✎
1. E est au plus dénombrable,
2. E est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$,
3. il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$.
Un ensemble non vide E est au plus dénombrable si, et seulement s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans E. ✎
Ainsi, un ensemble E non vide et au plus dénombrable, peut s'écrire $E = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (sans préciser que les

éléments sont deux à deux distincts).
L'image d'un ensemble au plus dénombrable par une application est au plus dénombrable.
L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable. ✎
Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.

II.3. Ensembles infinis non dénombrables.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est non dénombrable.
L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels n'est pas dénombrable.
Toute partie de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide est non dénombrable.
Les ensembles $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne sont pas dénombrables.
Ils ont la puissance du continu (admis).

III. Familles sommables.

III.1. Familles sommables de réels positifs.

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres réels positifs, où I est un ensemble quelconque est dite *sommable* sil 'ensemble suivant est majoré :

$$\left\{ \sum_{i\in J} u_i \mid J \subset I \text{ et } J \text{ fini} \right\}.$$

On note : $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sup_{\substack{J\subset I \\ J \text{ fini}}} \sum_{i\in J} u_i$. C'est un élément de $[0,+\infty]$.
La famille de réels positifs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge. Et dans ce cas la somme de la famille et la somme de la série sont égales. ✎
Le support d'une famille sommable positive $(u_i)_{i\in I}$ est au plus dénombrable. ✎
Sommation par paquets (cas positif).

III.2. Familles sommables de nombres complexes.

Une famille de nombres complexes $(u_i)_{i\in I}$ est dite *sommable* si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.
Lorsque $I = \mathbb{N}$, on retrouve l'équivalence entre sommabilité et convergence absolue de la série.
Sommation par paquets (cas complexe).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Si la série de terme général u_n converge absolument alors, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ converge, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n. \quad ✎$$

⚠ Ce résultat est faux dans le cas d'une série semi-convergence. Voir l'exemple de la série harmonique alternée.

III.3. Application aux séries doubles.

Théorème de Tonelli discret.
Théorème de Fubini discret.