– Chapitre 18 : Espaces probabilisés –

En mpsi, vous avez étudié la notion d'espaces probabilisés dans le cas d'un univers fini. L'objectif de ce premier chapitre de probabilité est notamment de généraliser cette notion d'espaces probabilisés au cas d'un univers quelconque.

I. Notion de tribu et d'espace probabilisable.

On souhaite modéliser une *expérience aléatoire*.

Définition 1.

- On appelle *issue* (ou *réalisation*) d'une expérience aléatoire tout résultat possible de cette expérience.
- L'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire est appelé *l'univers*. On le note souvent Ω.

En mpsi, nous avez vu que lorsque Ω est un ensemble fini, alors l'ensemble des évènements est $\mathcal{P}(\Omega)$. Dans le cas, où l'ensemble Ω est infini non dénombrable, $\mathcal{P}(\Omega)$ est tellement « gros » qu'on ne peut raisonnablement plus travailler avec ; certaines parties seraient d'une telle complexité qu'on ne pourrait pas calculer leur probabilité. Dans ce cas, on va choisir pour ensemble des évènements, une partie stricte $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$, appelée *tribu*, et vérifiant certaines propriétés.

Définition 2. On appelle *tribu* ou *σ-algèbre* de Ω toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les 3 propriétés suivantes :

- $\Omega \in \mathcal{A}$,
- $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire : pour tout $A \in \mathcal{A}, \overline{A} \in \mathcal{A}$,
- $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Exemple 1. L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω est une tribu de Ω, appelée *tribu discrète*.
L'ensemble $\{\varnothing, \Omega\}$ de Ω, appelée *tribu grossière*.
Si A est une partie de Ω, l'ensemble $\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ est aussi une tribu de Ω.

Définition 3. On appelle *espace probabilisable* tout couple $(\Omega, \mathcal{A})$ où Ω est un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ une tribu de Ω.
On appellera alors *évènement* tout élément de $\mathcal{A}$.

Proposition 1. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Alors :

- $\varnothing \in \mathcal{A}$,
- $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$,
- $\mathcal{A}$ est stable par union et intersection finies,
- $\mathcal{A}$ est stable par différence.

Démonstration.

□

Exemple 2. On considère une suite infinie de lancers à pile ou face. On note A_n l'évènement « obtenir pile au n-ème lancer ». Écrire mathématiquement les évènements :

« obtenir au moins une fois pile »:

« obtenir au moins une fois face »:

« obtenir toujours pile »:

« obtenir toujours face »:

Exercice 1. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

1. Montrer que l'ensemble B des issues appartenant à tous les événements A_n sauf à un nombre fini est un événement.

2. Montrer que l'ensemble C des issues appartenant à une infinité d'événements A_n est un événement.

Remarque importante. On considère une expérience aléatoire d'univers Ω, et soit A un événement. L'expérience est réalisée, et on obtient l'issue $\omega \in \Omega$.

Alors, l'événement A est réalisé si, et seulement si, On emploie le même vocabulaire que dans les espaces probabilisés finis. Rappelons certains points :

Définition 4. On dit que l'événement A *implique* l'événement B si $A \subset B$.

Remarque 2. Cette définition est totalement légitimée, par le fait que si $A \subset B$, alors :

$$\forall \omega \in \Omega,\ (\omega \in A \ \Rightarrow\ \omega \in B).$$

Et cette implication peut se traduire en disant que « si A se réalise, alors B se réalise ».

Terminons cette partie par un tableau de correspondance entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste :

Langage probabiliste	Langage ensembliste
issue, réalisation	élément ω de l'univers Ω
événement	élément A de la tribu $\mathcal{A}$
A est réalisé	$\omega \in A$
A implique B	$A \subset B$
A ou B	$A \cup B$
A et B	$A \cap B$
événement contraire de A	complémentaire de A ($\overline{A}$)
événement élémentaire	singleton
événement impossible	$\varnothing$
événement certain	Ω
A et B sont incompatibles	$A \cap B = \varnothing$

II. Notion d'espace probabilisé.

II.1. Définitions.

Définition 5. On appelle *probabilité* sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, toute application P définie sur $\mathcal{A}$ et à valeurs dans $[0,1]$ vérifiant :

1. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$,

2. pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements 2 à 2 incompatibles, la série $\sum \mathrm{P}(A_n)$ converge et :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(A_n) \qquad (\sigma\text{-additivité}).$$

⚠ Une probabilité est donc une application, et non un nombre ! Cependant, si A est un événement, alors $\mathrm{P}(A)$ est un nombre, appelé la probabilité de A.

Définition 6. On appelle *espace probabilisé* tout triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ où $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

⚠ Un même espace probabilisable peut être muni de plusieurs probabilités. Par exemple, si l'on considère le lancer d'un dé à 6 faces, la probabilité dépendra du dé.

II.2. Propriétés.

Dans la suite $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ désignera un espace probabilisé.

Proposition 2. $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$

Démonstration.

$\square$

Proposition 3. Pour toute famille au plus dénombrable d'événements deux à deux incompatibles $(A_i)_{i\in I}$, la famille $(\mathrm{P}(A_i))_{i\in I}$ est sommable et :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathrm{P}(A_i).$$

Démonstration.

$\square$

Corollaire 1. Si A et B sont deux événements incompatibles : $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

⚠ Une probabilité sur un univers fini Ω, telle que définie en mpsi, est donc un cas particulier de la définition donnée ici pour un espace probabilisable quelconque. Dans le cas fini, la tribu des événements est $\mathcal{P}(\Omega)$.

Théorème 1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et soit A et B deux événements. On a :

1. $\mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$,

2. $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$,

3. si $A \subset B$, alors $\mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B)$, et $\mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)$,

4. $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

Remarque 3. La point 3 signifie que P est une application croissante de l'ensemble ordonnée $(\mathcal{A}, \subset)$ dans l'ensemble ordonné $([0,1], \leqslant)$.

Démonstration.

$\square$

Définition 7.

- Tout événement de probabilité nulle est dit *négligeable*.
- Tout événement de probabilité 1 est dit *presque sûr* ou *presque certain*.

Définition 8. On appelle *système complet d'événements* d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, toute famille au plus dénombrable d'évènements $(A_i)_{i \in I}$ deux à deux incompatibles et tels que :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega.$$

⚠ Cette notion de système complet d'événements est une notion purement ensembliste i.e. ne faisant pas intervenir de probabilité.

Exemple 3. Si A est un évènement différent de $\varnothing$ et de Ω alors $(A, \overline{A})$ est un sce.
Pour le lancer d'un dé, notons $A_1 = \{1, 3, 5\}, A_2 = \{2, 4\}$ et $A_3 = \{6\}$. Alors (A_1, A_2, A_3) est un sce.

Définition 9. On appelle *système quasi-complet d'événements* d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, toute famille au plus dénombrable d'évènements $(A_i)_{i \in I}$ deux à deux incompatibles et tels que :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 1.$$

⚠ Contrairement à la notion de système complet d'événements, la notion de système quasi-complet d'événements dépend du choix de la probabilité P.

⚠ Tout système complet d'événements est en particulier un système quasi-complet d'événements.

Proposition 4. Si $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet d'événements, alors la famille $\big(\mathrm{P}(A_i)\big)_{i\in I}$ est sommable et :

$$\sum_{i\in I} \mathrm{P}(A_i) = 1.$$

Démonstration.

□

Théorème 2. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système quasi-complet d'événements. Alors, pour tout événement B, la famille $\big(\mathrm{P}(A_i \cap B)\big)_{i\in I}$ est sommable et :

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathrm{P}(A_i \cap B).$$

⚠ Nous verrons que cette propriété est à la base de *la formule des probabilités totales*.

Démonstration.

□

Théorème 3. Théorème de continuité croissante.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements (i.e. $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Alors, on a :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(A_n).$$

Démonstration.

□

Théorème 4. Théorème de continuité décroissante.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'événements (i.e. $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Alors, on a :

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(A_n).$$

Démonstration.

□

Corollaire 2. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements, on a :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$$

Démonstration.

□

Proposition 5. Inégalité de Boole ou sous-additivité.
Pour toute famille au plus dénombrable d'événements $(A_i)_{i\in I}$, on a :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leqslant \sum_{i\in I} \mathrm{P}(A_i).$$

⚠ Dans cette inégalité de Boole, on n'a pas nécessairement $\sum_{i\in I} \mathrm{P}(A_i) < +\infty$, mais si la somme est supérieure à 1, l'inégalité est sans intérêt.

Démonstration.

□

Exercice 2. Soit A, B et C trois événements équiprobables, i.e. tels que $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C)$. Montrer que si de plus $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = 0$, alors $\mathrm{P}(A) \leqslant \frac{2}{3}$.

Corollaire 3.

- Une réunion au plus dénombrable d'événements négligeables est un événement négligeable.
- Une intersection au plus dénombrable d'événements presque sûrs est un événement presque sûr.

Démonstration.

$\square$

Remarque 4.

II.3. Le cas particulier des espaces probabilisés discrets.

Définition 10. Soit Ω un ensemble. On appelle *distribution de probabilités discrètes* sur Ω toute famille sommable d'éléments de $\mathbb{R}_+$ indexée par Ω et de somme 1.

Définition 11. Soit $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilités discrètes sur Ω. On appelle *support* de $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ l'ensemble : $\{\omega\in\Omega \mid p_\omega\neq 0\}$.

Proposition 6. Le support d'une distribution de probabilités discrète est au plus dénombrable.

Démonstration.

□

Proposition 7. Si $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est une distribution de probabilités discrètes sur Ω, alors l'application :

$$\mathrm{P} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\omega\in A} p_\omega \end{array}$$

est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$.
Cette probabilité P est appelée *probabilité associée* à la distribution $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$.
Elle vérifie : $\forall\omega\in\Omega,\ \mathrm{P}\big(\{\omega\}\big)=p_\omega$.

Démonstration.

□

Définition 12. On appelle *espace probabilisé discret* tout espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathrm{P})$ où P est une probabilité associée à une distribution de probabilités discrètes sur Ω.

⚠ Dans le cas d'un univers fini, on peut en particulier définir une probabilité pour laquelle les événements élémentaires ont tous même probabilité : c'est la *probabilité uniforme*. Ce n'est pas possible pour un univers dénombrable. Pourquoi ?

On vient de définir, pour n'importe quel univers Ω, la notion de probabilité associée à une distribution de probabilités discrètes, qui est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Dans le cas où Ω est au plus dénombrable il n'y en a pas d'autres :

Proposition 8. Soit Ω un ensemble au plus dénombrable et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Si l'on pose $p_\omega = \mathrm{P}\big(\{\omega\}\big)$, pour tout $\omega \in \Omega$, alors $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est une distribution de probabilités discrète sur Ω et P est la probabilité associée à cette distribution.

Démonstration.

$\square$

Remarque importante.

- Dans le cas où Ω est une ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$, une distribution de probabilités discrète sur Ω est simplement un n-uplet $(p_1, \ldots, p_n)$ de réels positifs tel que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.
- Dans le cas où $\Omega = \mathbb{N}$, une distribution de probabilités discrète sur $\mathbb{N}$ est simplement une suite (p_n) de réels positifs telle que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

Exercice 3. Soit $\lambda > 0$. Montrer que l'on définit bien une distribution de probabilités discrète sur $\mathbb{N}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

III. Variables aléatoires discrètes.

III.1. Définitions.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, et soit E un ensemble quelconque.

Définition 13. On appelle *variable aléatoire discrète* définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ et à valeurs dans E, toute application définie sur Ω, à valeurs dans l'ensemble E, telle que $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable et que :

$$\forall x \in X(\Omega),\ X^{-1}\big(\{x\}\big) \in \mathcal{A}.$$

⚠ La propriété $X^{-1}\big(\{x\}\big) \in \mathcal{A}$ signifie simplement que l'ensemble $X^{-1}\big(\{x\}\big)$ est un événement.

⚠ Si Ω est muni de la tribu discrète $\mathcal{P}(\Omega)$, alors toute application de Ω dans E est une variable aléatoire.

Définition 14. Une variable aléatoire discrète est dite *réelle* si $E \subset \mathbb{R}$, *complexe* si $E \subset \mathbb{C}$, *finie* si $X(\Omega)$ est un ensemble fini.

Proposition 9. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Alors pour tout partie A de E, l'ensemble $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.

Démonstration.

□

Notations.

On vient de voir que si X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans E et si A est une partie de E, alors l'ensemble :

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$

est un événement. Cet événement sera noté : $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$.

Ces notations seront en particulier très utilisées pour des variables aléatoires réelles avec A un intervalle de la forme : $\{x\}$, $]-\infty, x]$, $[x, +\infty[$, $]-\infty, x[$ et $]x, +\infty[$. On obtient alors respectivement les événements :

$$\{X = x\},\ \{X \leqslant x\},\ \{X \geqslant x\},\ \{X < x\} \text{ et } \{X > x\}.$$

⚠ On remarque que, pour tout $x \in E \setminus X(\Omega)$, on a $\{X = x\} = \varnothing$.

Ainsi $\{X = x\} = \varnothing$ sauf pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs de x.

Proposition 10. Soit a un élément d'un ensemble E. L'application constante égale à a est une variable aléatoire (finie).

Démonstration.

□

Proposition 11. Soit A un événement. L'application indicatrice de A, notée $\mathbb{1}_A$, est une variable aléatoire (finie).

Démonstration.

□

Proposition 12. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et soit f une application définie sur un ensemble contenant $X(\Omega)$. L'application $f \circ X$ est alors une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Elle sera notée $f(X)$.

Démonstration.

□

III.2. Loi d'une variable aléatoire discrète.

Proposition 13. Si X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, alors, l'application :

$$\mathrm{P}_X : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathrm{P}(X \in A) \end{array}$$

est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$. Cette probabilité est appelée *loi de* X.

Remarque 6. Dans ce théorème $\mathrm{P}(X \in A)$ désigne en fait $\mathrm{P}(\{X \in A\})$, c'est un abus de notation largement répandu. On a donc :

$$\mathrm{P}(\{X \in A\}) = \mathrm{P}(X \in A) = \mathrm{P}_X(A).$$

Démonstration.

□

Proposition 14. Si X est une variable aléatoire discrète, alors la famille d'événements $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, appelé *système complet d'événements associé à X*. On a ainsi :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathrm{P}(X = x) = 1.$$

Nous savons qu'une probabilité sur un univers au plus dénombrable est entièrement déterminée par la donnée des probabilités de chaque événement élémentaire. Plus précisément :

Proposition 15. Si X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, alors, la loi de X, P_X, est entièrement déterminée, par la donnée de la distribution de probabilités discrète $\big(P(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$.
De plus pour tout événement A de $X(\Omega)$:

$$\mathrm{P}_X(A) = \sum_{x \in A} \mathrm{P}(X = x).$$

Démonstration.

□

Remarque 7. Déterminer la loi d'une variable aléatoire X, c'est donc déterminer $X(\Omega)$ ainsi que la valeur de $\mathrm{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Théorème 5. Soit E un ensemble et $(p_x)_{x\in E}$ une distribution de probabilités discrète sur E.
Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et une variable aléatoire X telle que :

$$X(\Omega) \subset E \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E,\ \mathrm{P}(X = x) = p_x.$$

Démonstration.

□

Définition 15. Une variable aléatoire est dite *presque sûrement constante* s'il existe un élément a tel que $\mathrm{P}(X = a) = 1$.

Définition 16. On dit que deux variables aléatoires discrètes X et Y ont même loi si $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et $P_X = P_Y$. On note alors $X \sim Y$. On dira aussi que X et Y sont identiquement distribuées.

⚠ Les variables X et Y ne sont pas nécessairement définies sur le même espace probabilisé.

⚠ On pourra encore considérer que X et Y ont même loi si les ensembles $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ ne sont pas égaux, à condition qu'ils ne diffèrent que par des valeurs de probabilité nulle.

Loi de $f(X)$.

Proposition 16. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et f une application définie sur $X(\Omega)$. Alors la loi de $f(X)$ est donnée par :

$$\forall y \in f(X)(\Omega), \quad \mathrm{P}\big(f(X) = y\big) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathrm{P}(X = x).$$

Démonstration.

□

Proposition 17. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans E et f une application définie sur E. Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

Démonstration.

□

III.3. Lois usuelles.

III.3.a. Loi de Bernoulli.

Définition 17. Soit $p \in]0,1[$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la *loi de Bernoulli de paramètre* p si $X(\Omega) = \{0,1\}$ et si $\mathrm{P}(X=1) = p$.

On le note : $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Remarque 8. Dans ce cas, on a alors : $\mathrm{P}(X=0) = 1-p$.

Remarque importante. Soit A un événement tel que $\mathrm{P}(A) \in]0,1[$. Alors, en notant $p = \mathrm{P}(A)$, on a :

$$\mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(p).$$

Plus généralement, toute épreuve à deux issues peut être modélisée par une loi de Bernoulli. Une telle épreuve est d'ailleurs appelée *épreuve de Bernoulli.*

III.3.b. Loi binomiale.

Définition 18. Soit $p \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la *loi binomiale de paramètres* n *et* p si $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et si :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathrm{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On le note : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

⚠ On a bien défini la loi d'une variable aléatoire car :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathrm{P}(X=k) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X=k) =$$

Remarque 10. La loi binomiale $\mathcal{B}(1,p)$ n'est rien d'autres que la loi

On renouvelle n fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Si l'on note X

la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus à l'issue des n épreuves, alors $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

III.3.c. Loi géométrique.

Définition 19. Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$. On dit qu'une variable aléatoire discrète X suit la *loi géométrique de paramètre p* si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et si :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}(X=k) = pq^{k-1}.$$

On le note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

⚠ On a bien défini la loi d'une variable aléatoire car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}(X=n) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X=n) =$$

Proposition 18. Si la variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, on a, pour tout entier naturel k :

$$\mathrm{P}(X>k) = q^k.$$

Démonstration.

□

On considère le jeu de pile ou face infini, la probabilité d'obtenir pile (succès) à chaque lancer étant $p \in]0,1[$ (on pose $q = 1-p$). La loi géométrique permet de modéliser le rang du premier succès.

III.3.d. Loi de Poisson.

Définition 20. Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire discrète X suit la *loi de Poisson de paramètre λ* si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

On le note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

⚠ On a bien défini la loi d'une variable aléatoire car :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(X=n) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X=n) =$$

Proposition 19. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suive la loi binomiale de paramètre (n, p_n). On suppose que la suite (np_n) converge vers un réel $\lambda > 0$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Démonstration.

□

Si la variable aléatoire X suit une loi binomiale avec n grand et p proche de 0, elle suit donc approximativement une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$. C'est pourquoi l'on dit que la loi de Poisson est la loi des événements « rares ».

Plus précisément la loi de Poisson est utilisée pour modéliser le nombre d'occurrences d'un phénomène rare au cours d'un intervalle de temps donné. Par exemple :

- le nombre d'arrivées de bateaux dans un port dans un intervalle de temps donné,
- le nombre de communications dans un intervalle de temps donné,
- le nombre de buts au cours d'un match.

IV. Le module random en Python.

On commancera par importer le module `random` (d'alias `rd`) : `import random as rd`.

On utilisera les commandes suivantes:

`rd.random()`	retourne un flottant choisi au hasard dans l'intervalle $[0, 1[$
`a+(b-a)*rd.random()`	retourne un flottant choisi au hasard dans l'intervalle [`a,b`[
`rd.randint(a,b)`	retourne un entier choisi au hasard dans l'ensemble ⟦`a,b`⟧, où `a` et `b` sont deux entiers
`rd.choice(L)`	retourne un élément choisi au hasard dans une liste `L`
`(rd.random()<p)*1`	retourne 1 avec probabilité `p` et 0 avec probabilité `1-p`