– Chapitre 19 : Probabilités conditionnelles et indépendance –

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ désigne un espace probabilisé quelconque.

I. Probabilités conditionnelles.

I.1. Définition.

Définition 1. Si A et B sont deux événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et si $\mathrm{P}(A) \neq 0$, alors on appelle *probabilité conditionnelle de B sachant A* le nombre noté $\mathrm{P}_A(B)$ ou $\mathrm{P}(B|A)$ et défini par :

$$\mathrm{P}_A(B) = \mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}.$$

Remarque importante. Cette définition revient à restreindre l'univers à A (la division par $\mathrm{P}(A)$ ne servant qu'à ce que la probabilité de l'événement certain reste égale à 1), ce qui correspond bien à la prise en compte de l'information apportée par la réalisation de A.

⚠ La notation $\mathrm{P}(B|A)$ est dangereuse car pourrait laisser entendre qu'il existerait un événement $B|A$. Il n'existe pas d'événement conditionnel, mais seulement des probabilités conditionnelles. Quand on calcule $\mathrm{P}(B|A)$ l'événement auquel on s'intéresse est B.

Théorème 1. Pour tout événement A de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ avec $\mathrm{P}(A) \neq 0$, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{P}_A & : & \mathcal{A} & \longrightarrow & [0,1] \\ & & B & \longmapsto & \mathrm{P}_A(B) \end{array}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Elle est appelée la *probabilité conditionnelle sachant A*.

Démonstration.

□

Exercice 1. On considère une famille de deux enfants. On fait l'hypothèse que chaque enfant a une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ d'être une fille. Quelle est la probabilité pour ce couple d'avoir deux filles :

1. si on sait que l'aînée est une fille ?

2. si on sait que le couple a au moins une fille ?

I.2. FORMULE DES PROBABILITÉS COMPOSÉES.

Dans les exercices, le plus souvent on ne calculera pas $\mathrm{P}_A(B)$ à partir de $\mathrm{P}(A \cap B)$, mais au contraire, on calculera $\mathrm{P}(A \cap B)$ à partir de $\mathrm{P}_A(B)$:

Proposition 1. Si $\mathrm{P}(A) \neq 0$ alors $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}_A(B)$.
On dit que l'on a *conditionné* par l'événement A.

Démonstration. □

Théorème 2. Formule de probabilités composées.
Soit un entier $n \geqslant 2$ et $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille de n événements tels que $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. On a alors :

$$\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}_{A_1}(A_2) \cdot \mathrm{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathrm{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Démonstration. Par récurrence sur $n \geqslant 2$. □

Remarque 2.

I.3. Formule des probabilités totales.

Théorème 3. Formule des probabilités totales.
Soit $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet d'événements <u>non négligeables</u>. Alors, pour tout événement B la famille $\big(\mathrm{P}(A_i \cap B)\big)_{i\in I}$ est sommable et :

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathrm{P}(A_i \cap B) = \sum_{i\in I} \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}_{A_i}(B).$$

Démonstration. Voir chapitre précédent. □

I.4. Formules de Bayes.

Théorème 4. Formule de Bayes.
Si A et B sont deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors :

$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)}.$$

Démonstration.

□

Remarque 3. Cette formule permet d'inverser le conditionnement, puisqu'elle permet d'exprimer $P_B(A)$ en fonction de $P_A(B)$; ce qui revient souvent à inverser la chronologie des événements.

Exercice 2. On considère une épidémie. On note p la probabilité d'être affecté par cette maladie. La population compte 95% de personnes vaccinées, et 1 malade sur 2 avait été vacciné. Quelle est la probabilité pour une personne vaccinée de contracter cette maladie ?

En combinant la formule de Bayes et la formule des probabilité totales, on obtient ce qu'on appelle parfois la deuxième formule de Bayes :

Corollaire 1. Soit $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet d'événements <u>non négligeables</u>. Alors, pour tout événement B tel que $P(B) \neq 0$, on a :

$$\forall j \in I,\ P_B(A_j) = \frac{P(A_j) \cdot P_{A_j}(B)}{\sum\limits_{i\in I} P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}.$$

I.5. Lois conditionnelles.

Définition 2. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et $A \in \mathcal{A}$ un événement tel que $P(A) \neq 0$.
On définit *la loi de X sachant A* comme la loi de X dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}_A)$.
Cette loi est donc déterminer par la donnée de $\mathrm{P}_A(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Remarque 4. Si Y est une deuxième variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et si $y \in Y(\Omega)$ est un élément tel que $P(Y = y) \neq 0$, on s'intéressera en particulier à la loi de X sachant l'événement $\{Y = y\}$.
Autrement-dit, on s'intéressera à la donnée de $\mathrm{P}(X = x \mid Y = y)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Exercice 3. Loi sans mémoire.

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Montrer que :

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2,\ \mathrm{P}(X > k + \ell \mid X > k) = \mathrm{P}(X > \ell). \quad (*)$$

2. Réciproquement, soit X une variable aléatoire vérifiant $(*)$ et telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Montrer que X suit une loi géométrique et préciser la valeur de son paramètre p.

⚠ L'assertion $(*)$ signifie que la loi conditionnelle de $X - k$ sachant $\{X > k\}$ est la même que la loi de X. De telles lois sont dites *sans mémoires.* Elles sont notamment utilisées pour modéliser la durée de vie d'un composant sans usure.

II. Événements indépendants.

II.1. Indépendance de deux événements.

Définition 3. Deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ sont dits *indépendants* si :

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Exemple 1. Si A est un événement négligeable, alors il est indépendant de tout événement B. En effet :

Remarque 5.

- Si $P(A) \neq 0$ alors : A et B sont indépendants si, et seulement si, $\mathrm{P}_A(B) = \mathrm{P}(B)$.
- Si $P(B) \neq 0$ alors : A et B sont indépendants si, et seulement si, $\mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A)$.

Proposition 2. Si A et B sont deux événements indépendants, alors les événements A et $\overline{B}$, les événements $\overline{A}$ et B et les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

Démonstration.

□

Exemple 2. Si A est un événement presque certain, alors il est indépendant de tout événement B.
En effet :

⚠ La notion d'indépendance est une notion probabiliste i.e. qu'elle dépend du choix de la probabilité :

Exercice 4. On lance deux fois une pièce de monnaie, et l'on note :
A : "les deux lancers donnent le même résultat" et B : "le deuxième lancer donne face".
Étudier l'indépendance de A et B dans chacun des cas suivants :
1. La pièce est équilibrée.
2. La probabilité d'obtenir Pile lors d'un lancer est de $\frac{3}{4}$.

Posons $\Omega =$ et F_i : "obtenir face au i-ème lancer".

II.2. Indépendance d'une famille d'événements.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une une famille quelconque d'événements d'un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

Définition 4. Les événements A_i, pour $i \in I$, sont dits *deux à deux indépendants* si :

$$\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j).$$

⚠ Même si 3 événements A_1, A_2, A_3 sont 2 à 2 indépendants, on ne sait pas toujours déterminer $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$, ce qui nous amène à une notion plus précise :

Définition 5. Les événements A_i, pour $i \in I$, sont dits sont dits *mutuellement indépendants* si pour toute partie finie $J \subset I$:

$$P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i).$$

⚠ L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fausse.

Remarque importante. Concrètement, lors d'une succession de n épreuves aléatoires sans aucun lien entre-elles si, pour tout i, l'événement A_i porte sur la i-ème épreuve, alors les événements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants.

Proposition 3. Pour tout $i \in I$, on note B_i l'événement A_i ou $\overline{A_i}$.

- Si les A_i, pour $i \in I$, sont deux à deux indépendants, alors les B_i aussi.
- Si les A_i, pour $i \in I$, sont mutuellement indépendants, alors les B_i aussi.

III. Couples de variables aléatoires.

III.1. Définitions.

Définition 6. On appelle *couple de variables aléatoires* sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application :

$$Z : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E_1 \times E_2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)), \end{array}$$

où X et Y sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs respectivement dans E_1 et E_2.

Exemple 3. On lance deux dés. On note X la variable aléatoire égale au plus petit des deux résultats, et Y la variable aléatoire égale au plus grand. Alors (X, Y) est un couple de variables aléatoires réelles.

Proposition 4.

1. Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs respectivement dans dans E_1 et E_2, alors le couple (X, Y) est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E_1 \times E_2$.

2. Réciproquement, toute variable aléatoire discrète Z à valeurs dans $E_1 \times E_2$ peut s'écrire $Z = (X, Y)$ où X et Y sont deux variables aléatoires discrètes à valeurs respectivement dans dans E_1 et E_2.

Démonstration.

□

Remarque 7. Si $Z = (X, Y)$ est un couple de variables aléatoires discrètes, alors :

$$Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega).$$

Cette inclusion n'est pas toujours une égalité. Il suffit de reprendre l'exemple précédent avec le couple $(2, 1)$ pour s'en convaincre.

Proposition 5. Soit (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes alors la famille :

$$\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$$

est un système complets d'événements de Ω ; c'est le SCE associé au couple (X, Y).
En particulier,

$$\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \mathrm{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) = 1$$

ce que l'on peut écrire :

$$\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \mathrm{P}\big(X = x, Y = y\big) = 1.$$

Rappel. On a déjà vu que si X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et si f est une application définie sur $X(\Omega)$ alors, $f(X)$ est une variable aléatoire discrète.

Proposition 6. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, et soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Alors, XY et $aX + bY$ sont des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Démonstration.

□

III.2. Loi conjointe.

Définition 7. Soit (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes.
On appelle *loi conjointe* de X et Y, la loi du couple (X, Y).

Remarque importante. Comme pour n'importe quelle variable aléatoire, la loi du couple (X, Y) est entièrement déterminée par la donnée de :

$$P(X = x, Y = y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega).$$

Exercice 5. On lance deux dés. On note X la variable aléatoire égale au plus petit des deux résultats, et Y la variable aléatoire égale au plus grand. Donner la loi conjointe de X et Y. En déduire $\mathrm{P}(X = Y)$.

⚠ Ne pas confondre $\mathrm{P}(X = Y)$ et $\mathrm{P}(X = k, Y = k)$.

Théorème 5. Soit E_1 et E_2 deux ensembles et $(p_{x,y})_{(x,y)\in E_1\times E_2}$ une distribution de probabilités discrète. Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et un couple $Z = (X, Y)$ de variables aléatoires discrètes tels que :

$$Z(\Omega) \subset E_1 \times E_2 \qquad \text{et} \qquad \forall (x, y) \in E_1 \times E_2,\ \mathrm{P}(X = x, Y = y) = p_{x,y}.$$

Démonstration. Voir théorème 5 du chapitre précédent. □

III.3. Lois marginales.

Définition 8. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes.
On appelle *première marginale du couple* la loi de X et *deuxième marginale du couple* la loi de Y.

Théorème 6. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

1. Pour tout $x \in X(\Omega), \mathrm{P}(X = x) = \displaystyle\sum_{y\in Y(\Omega)} \mathrm{P}(X = x, Y = y)$.

2. Pour tout $y \in Y(\Omega), \mathrm{P}(Y = y) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} \mathrm{P}(X = x, Y = y)$.

Démonstration.
□

Remarque 9. Le théorème précédent permet de retrouver les lois marginales, à partir de la loi conjointe. En général, il n'est cependant pas possible de retrouver la loi conjointe à partir des lois marginales.

Exercice 6. On lance deux dés. On note X la variable aléatoire égale au plus petit des deux résultats, et Y la variable aléatoire égale au plus grand. Déterminer les lois marginales, à partir de la loi conjointe déterminée précédemment.

Remarque 10. On peut résumer la loi conjointe dans un tableau à double entrée, et retrouver facilement les lois marginales :

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6	loi de X
1							
2							
3							
4							
5							
6							
loi de Y							

Nous avons vu qu'en général, il n'est pas possible de retrouver la loi conjointe à partir des lois marginales. Cela sera possible lorsque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

III.4. Indépendance de deux variables aléatoires.

Définition 9. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes, à valeurs respectivement dans E_1 et E_2.
On dit que X et Y sont *indépendantes*, si pour toutes parties A de E_1 et B de E_2, les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants, i.e. si :

$$\mathrm{P}(X \in A, Y \in B) = \mathrm{P}(X \in A) \cdot \mathrm{P}(Y \in B).$$

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Proposition 7. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, si, et seulement si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants, i.e. si :

$$\mathrm{P}(X = x, Y = y) = \mathrm{P}(X = x) \cdot \mathrm{P}(Y = y).$$

Exercice 7. Les variables aléatoires X et Y de la remarque précédente sont-elles indépendantes ?

Remarque 11. Une variable presque sûrement constante est indépendante de toute variable aléatoire discrète, car

Exercice 8. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi respective $\mathcal{B}(\frac{1}{3})$ et $\mathcal{B}(\frac{1}{4})$. Déterminer la loi conjointe de X et de Y.

$X \backslash Y$	0	1
0		
1		

$P(X = 0, Y = 0) =$

$P(X = 1, Y = 0) =$

$P(X = 0, Y = 1) =$

$P(X = 1, Y = 1) =$.

III.5. Fonction de deux variables aléatoires indépendantes.

Proposition 8. Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

Démonstration.

$\square$

III.6. Loi de $X+Y$.

Lemme. Formule de Vandermonde.
Pour tout $(k,n,m)\in\mathbb{N}^3$:

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}.$$

Démonstration.

$\square$

Proposition 9. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, de lois respectives $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$, alors $X+Y\sim\mathcal{B}(n+m,p)$.

Démonstration.

$\square$

Proposition 10. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$, alors $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Démonstration.

$\square$

Remarque 12. Pour deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ on a utilisé :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(X+Y=n) =$$

Pour deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$ on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \mathrm{P}(X+Y=n) =$$

III.7. Loi de $\mathrm{Inf}(X,Y)$ et $\mathrm{Sup}(X,Y)$.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. Posons :

$$I = \mathrm{Inf}(X,Y) \text{ et } S = \mathrm{Sup}(X,Y).$$

On a alors : $X(\Omega) = Y(\Omega) = I(\Omega) = S(\Omega)$.
Pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S \leqslant k) &= \qquad\qquad = \\ \mathrm{P}(I > k) &= \qquad\qquad = \end{aligned}$$

Exercice 9. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{U}(\llbracket 1,6 \rrbracket)$.
Déterminer la loi de $I = \mathrm{Inf}(X,Y)$ et $S = \mathrm{Sup}(X,Y)$.

Soit $k \in [\![1,6]\!]$.

Par indépendance des variables aléatoires X et Y, on a :

$\mathrm{P}(S \leqslant k) =$.

$\mathrm{P}(I > k) =$.

$\mathrm{P}(S = k) =$.

$\mathrm{P}(I = k) =$.

III.8. Généralisation au cas d'un n-uplet de variables aléatoires.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 10. On appelle *n-uplet de variables aléatoires* sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application :

$$Z : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E_1 \times \cdots \times E_n \\ \omega & \longmapsto & (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)), \end{array}$$

où pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans E_i.
On notera $Z = (X_1, \dots, X_n)$.

Dans la suite, on considère un n-uplet de variables aléatoires discrètes $(X_1, \dots, X_n)$.

Comme dans le cas des couples de variables aléatoires, on définit la loi conjointe et les lois marginales, ainsi que la notion d'indépendance. Mais comme dans le cas des événements, quand il y a plus de deux variables aléatoires il n'est plus possible de parler d'indépendance : il faut alors préciser s'il s'agit de l'indépendance deux à deux ou de l'indépendance mutuelle.

Définition 11. Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont dites *indépendantes deux à deux* si pour tous entiers distincts i et j de $[\![1,n]\!]$, les variables aléatoires X_i et X_j sont indépendantes.

Définition 12. $X_1, \dots, X_n$ sont dites *mutuellement indépendantes* si pour toutes parties A_1 de $E_1, \dots, A_n$ de E_n, les événements $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\}$ sont mutuellement indépendants.

Et on montre facilement que :

Proposition 11. $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, pour tous x_1 de $X_1(\Omega), \dots, x_n$ de $X_n(\Omega)$, les événements $\{X_1 = x_1\}, \dots, \{X_n = x_n\}$ sont mutuellement indépendants.

Et comme l'indépendance mutuelle des événements, implique leur indépendance deux à deux :

Proposition 12. Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors elles sont indépendantes deux à deux.

Proposition 13. Lemme des coalitions.
Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes à valeurs respectivement dans $E_1, \dots, E_n$. Soit un entier p tel que $1 \leqslant p < n$.

Soit f une application définie sur $E_1 \times \cdots \times E_p$ et g définie sur $E_{p+1} \times \cdots \times E_n$.

Alors les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Démonstration.

□

Corollaire 2. Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre p, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Démonstration.

□

Corollaire 3. Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et telles que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, X_k suit la loi de Poisson de paramètre λ_k, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$.

Démonstration.

□

III.9. Suites de variables aléatoires indépendantes.

Définition 13. Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes est appelée *suite de variables aléatoires indépendantes* si, pour toute partie finie I de $\mathbb{N}$, les variables aléatoires réelles discrètes X_i, avec $i \in I$, sont mutuellement indépendantes.

⚠ Vous aurez noté que dans le cas des suites, on laisse parfois tombé l'adverbe : “mutuellement”.

Théorème 7. Pour toute suite $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de lois de probabilité discrètes, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes, indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi X_n soit (P_n).

Démonstration. Admis. □

⚠ Ce théorème est en particulier utile dans le cas d'une seule loi de probabilité discrète P. Il existe alors un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes, indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n soit P.

On dit alors que les variables sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d. en abrégé).

Une telle suite modélise une suite d'épreuves identiques aux résultats indépendants.

Exemple 4. Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre p, permet une modélisation du *jeu de pile ou face infini.*

Exemple 5. Loi géométrique.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètres p.

On note T le nombre de tirages nécessaires pour obtenir un succès (i.e. un 1) pour la première fois et $+\infty$ si l'on n'a jamais de succès. Déterminons la loi de T.