– TD 17 : Dénombrement. –

Exercice 1. Une anagramme est un mot obtenu en permutant les lettres d'un mot. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot « abracadabra »?

Exercice 2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On note (E) l'équation $x_1+x_2+...+x_p = n$ d'inconnue $(x_1, x_2, ..., x_p)$.
1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation (E), dans $\mathbb{N}^p$.
2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation (E), dans $(\mathbb{N}^*)^p$.

Exercice 3. Soit n et p des entiers naturels.
1. Montrer par récurrence :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{k} = \binom{n+p+1}{p}.$$

2. On va maintenant donner une preuve combinatoire de cette égalité. On considère une commode contenant $n+2$ tiroirs superposés dans lesquels on souhaite y ranger p chaussettes identiques.

a. Quel est le nombre de manière d'effectuer ce rangement ?
Indication : on pourra matérialiser les $n+2$ tiroirs par $n+3$ barres horizontales superposées et les p chaussettes par p croix à intercaler entre les barres.

b. On va maintenant effectuer le rangement de la façon suivante : on range k chaussettes dans les $n+1$ premiers tiroirs et toutes les chaussettes restantes dans le dernier tiroir. Quel est le nombre de manières d'effectuer ce rangement ? Conclure.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'un raisonnement ensembliste, montrer que :

$$\sum_{p \text{ pair}} \binom{n}{p} = \sum_{p \text{ impair}} \binom{n}{p}.$$

Exercice 5. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$.

Exercice 6. Soit $(A, +, \times)$ un anneau à n éléments (où $n > 1$ est un entier) commutatif et intègre. Montrer que $(A, +, \times)$ est un corps.
Indication : on pourra s'intéresser à l'application :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} A & \to & A \\ x & \mapsto & ax \end{array}$$

Exercice 7. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{N})$ des permutations de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 8. Nombre algébrique - Nombre transcendant.
1. Montrer que tout $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle est dénombrable.
2. Montrer que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.
On appelle *nombre algébrique* tout nombre complexe racine d'un polynôme non nul de $\mathbb{Q}[X]$. Un nombre complexe qui n'est pas algébrique est dit *transcendant.*
3. Déduire des questions précédentes, qu'il existe des réels transcendants.
⚠ On pourrait directement prouver que π et e sont transcendants.

Exercice 9. L'ensemble $E = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \text{ est fini}\}$ est-il dénombrable ?

Exercice 10. Formule d'inversion de Pascal - Nombre de surjections.

1. Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$.

2. Pour n et p entiers naturels, on note $s_n(p)$ le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, p]\!]$. Montrer que $p^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} s_n(k)$. En déduire la valeur de $s_n(p)$.

Exercice 11. Montrer que que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n,$$

où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs positifs de n.

Exercice 12. Soit σ un permutation de $\mathbb{N}^*$. Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sigma(n)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sigma(n)}.$$

Exercice 13. Soit σ un permutation de $\mathbb{N}^*$. Montrer la divergence de la série de terme général $\dfrac{\sigma(n)}{n^2}$.

Exercice 14. Montrer l'égalité :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$