# – Chapitre 21 : Fonctions vectorielles de la variable réelle –

Les fonctions sont définies sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide. Elles sont à valeurs dans un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé $E$ de dimension finie égale à $n \geqslant 1$. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## I. Dérivation.

### I.1. Dérivée en un point.

On considère une fonction $f : I \to E$ et $a$ un point de $I$.

**Définition 1.** On dit que $f$ est *dérivable* en $a$ si la fonction *taux d'accroissement* de $f$ en $a$, notée $\tau_a$ et définie sur $I \setminus \{a\}$ par :

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite dans $E$ quand $x$ tend vers $a$.
Cette limite est alors appelée *dérivée* de $f$ en $a$ et notée $f'(a)$ :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{ou encore} \qquad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

⚠ Bien noter que $f'(a)$ est un élément de $E$. Ainsi, $f'(a)$ sera souvent appelée *vecteur dérivé* de $f$ en $a$.

**Interprétation cinématique.** Lorsque la fonction $f$ représente le mouvement d'un point matériel en fonction du temps, le vecteur $f'(t_0)$ représente le vecteur vitesse du point à l'instant $t_0$.

**Proposition 1.** La fonction $f$ est dérivable en $a$ si, et seulement si, il existe un vecteur $\ell \in E$ tel que :

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + (x-a)\ell + o(x-a).$$

On a alors : $f'(a) = \ell$.

Par conséquent, si $f$ est dérivable en $a$ on a alors :

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a) \qquad \text{ou} \qquad f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + hf'(a) + o(h).$$

**Proposition 2.** Si $f$ est dérivable en $a$ alors elle est continue en $a$.

**Démonstration.** Il suffit de passer à la limite dans l'une des deux égalités précédentes. □

⚠ La réciproque est fausse. Il suffit de considérer, par exemple, la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$. Elle est continue en 0 mais n' est pas dérivable en 0.

**Rappel. Fonctions coordonnées.** Si l'on munit $E$ d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, les fonctions coordonnées de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ sont les fonctions $f_1, \ldots, f_n$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, définies par :

$$\forall x \in I,\ f(x) =$$

**Proposition 3.** La fonction $f$ est dérivable en $a$ si, et seulement si, chacune de ses fonctions coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est dérivable en $a$. Dans ce cas, on a :

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a)\, e_i.$$

**Démonstration.**

$\square$

**Exemple 1.** Une fonction $f$ de $I$ dans $\mathbb{C}$ est dérivable en $a$ si, et seulement si, les fonctions $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont dérivables en $a$ et dans ce cas :

$$f'(a) =$$

**Exemple 2.** L'application $R : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

est dérivable en tout $t \in \mathbb{R}$, et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ R'(t) =$$

Comme dans le cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ on peut définir la notion de dérivation à droite et à gauche en $a$ :

**Définition 2.** Soit $a$ un élément de $I$. On dit que $f$ est :

- *dérivable à droite* en $a$ si $f|_{I \,\cap\, [a,+\infty[}$ est dérivable en $a$. On note alors $f_d'(a)$ sa dérivée,
- *dérivable à gauche* en $a$ si $f|_{I \,\cap\, ]-\infty,a]}$ est dérivable en $a$. On note alors $f_g'(a)$ sa dérivée.

### I.2. Fonction dérivée.

**Définition 3.** Lorsque la fonction $f$ est dérivable en tout point $a$ de $I$, on dit que $f$ est dérivable sur $I$. On appelle alors, *fonction dérivée* de $f$, la fonction définie sur $I$ par $x \mapsto f'(x)$. On la note $f'$.

**Théorème 1.** Une fonction $f$ est constante sur l'intervalle $I$ si, et seulement si, elle est dérivable et de dérivée nulle en tout point de $I$.

**Démonstration.** Il suffit d'appliquer le résultat analogue vu pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, à chacune des applications coordonnées. $\square$

### I.3. Opérations sur les fonctions dérivables.

Pour les 3 premiers résultats, il suffit d'appliquer le résultat analogue vu pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, à chacune des applications coordonnées :

**Proposition 4. Linéarité de la dérivation.**
Si $f$ et $g$ sont deux fonctions définies sur $I$ et dérivables en $a$ et si $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$ alors la fonction $\alpha f+\beta g$ est dérivable en $a$, et l'on a :

$$(\alpha f+\beta g)'(a)=\alpha f'(a)+\beta g'(a).$$

Autrement-dit, l'ensemble des fonctions définies sur $I$ et dérivables en $a$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,E)$ et l'application $f\mapsto f'(a)$ est linéaire.

**Proposition 5.** Soit $f:I\to E$ et $\lambda:I\to\mathbb{K}$. Si $f$ et $\lambda$ sont dérivables en $a$ alors la fonction $\lambda f$ est dérivable en $a$, et l'on a :

$$(\lambda f)'(a)=\lambda'(a)f(a)+\lambda(a)f'(a).$$

**Proposition 6.** Soit deux intervalles $I$ et $J$, ainsi que deux fonctions $f:I\to E$ et $\varphi:J\to\mathbb{R}$ telles que $\varphi(J)\subset I$. Soit $a\in I$.
Si $\varphi$ est dérivable en $a$ et si $f$ est dérivable en $\varphi(a)$, alors la fonction $f\circ\varphi$ est dérivable en $a$, et l'on a :

$$(f\circ\varphi)'(a)=\varphi'(a)f'(\varphi(a)).$$

**Proposition 7.** Soit $L$ une application linéaire de $E$ dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $F$ de dimension finie. Si $f$ est dérivable en $a$ alors $L\circ f$ est dérivable en a et :

$$\big(L\circ f\big)'(a)=L\big(f'(a)\big).$$

**Démonstration.**

□

**Proposition 8.** Soit $E, F$ et $G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Soit $B$ une application bilinéaire de $E \times F$ dans $G$. Soit $f : I \to E$ et $g : I \to F$.
Si $f$ et $g$ sont dérivables en $a$ alors $B(f, g)$ est dérivable en a et :

$$\big(B(f,g)\big)'(a) = B\big((f)'(a), g(a)\big) + B\big(f(a), (g)'(a)\big).$$

**Démonstration.**

□

**Exercice 1.** Appliquer la propriété précédente à l'application $f : t \mapsto \det(R(t))$.

**Corollaire 1.** Soit $E$ est un espace euclidien. Soit $f$ et $g$ deux fonctions de $I$ dans $E$. Si $f$ et $g$ sont dérivables en $a$, alors la fonction $\langle f, g\rangle$ est dérivable en $a$ et :

$$\big(\langle f, g\rangle\big)'(a) = \langle f'(a), g(a)\rangle + \langle f(a), g'(a)\rangle .$$

**Remarque 1.** Soit $E$ est un espace euclidien et $f : I \to E$ une fonction dérivable sur $I$.

L'application $\|f\|^2$ est dérivable sur $I$ et : $\big(\|f\|^2\big)' =$
Si de plus $f$ ne s'annule pas, la fonction racine carrée étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ l'application $\|f\| = \sqrt{\|f\|^2}$ est dérivable sur $I$ et :

$$\|f\|' =$$

⚠ $\|f\|$ est constante sur $I$ si, et seulement si, $f'(t)$ est orthogonal à $f(t)$ en tout point $t \in I$.

⚠ La proposition 8 s'étend à toute application multilinéaire. En particulier, si $\mathcal{B}$ est une base de $E$ et si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions dérivables sur $I$ à valeurs dans $E$, alors $\det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_n)$ est dérivable sur $I$ et :

$\det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_n)' =$

### I.4. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

**Définition 4.** Soit une fonction $f$ définie sur $I$. En posant $f^{(0)} = f$, on peut définir par récurrence la dérivée $k$-ème de $f$ sur $I$, notée $f^{(k)}$, comme étant, si elle existe, la dérivée de $f^{(k-1)}$ : $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$.

**Définition 5.**

- Une fonction $f$ est dite *de classe* $\mathcal{C}^k$ sur $I$, avec $k \in \mathbb{N}$, si elle est $k$ fois dérivable sur $I$ et si $f^{(k)}$ est continue sur $I$.
- Une fonction $f$ est dite *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$, ou *indéfiniment dérivable* sur $I$, si elle est $k$ fois dérivable sur $I$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, autrement dit, si elle admet des dérivées de tout ordre.

**Interprétation cinématique.** Lorsque la fonction $f$ représente le mouvement d'un point matériel en fonction du temps, le vecteur $f''(t_0)$représente le vecteur accélération du point à l'instant $t_0$.

**Notation.** Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on note $\mathcal{C}^k(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ et à valeurs dans $E$.

Dans toute la suite, $k$ désigne un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

**Proposition 9. Linéarité de la dérivation.**

L'ensemble $\mathcal{C}^k(I, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$ et si $k \in \mathbb{N}$, l'application $f \mapsto f^{(k)}$ est linéaire.

**Proposition 10.** Soit $L$ une application linéaire de $E$ dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $F$ de dimension finie. Si $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$ $L \circ f \in \mathcal{C}^k(I, E)$ et, si $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\left(L \circ f\right)^{(k)} = L \circ f^{(k)}.$$

**Proposition 11.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$, et soit $f_1, \dots, f_n$ les fonctions coordonnées de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.

La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ si, et seulement si, chacune de ses fonctions coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ le sont. De plus, si $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$f^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(k)}\, e_i.$$

**Proposition 12. Formule de Leibniz.**

Soit $f : I \to E$ et $\lambda : I \to \mathbb{K}$. Si $f$ et $\lambda$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ alors la fonction $\lambda f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ et, si $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$(\lambda f)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{(j)} f^{(k-j)}.$$

**Proposition 13. Formule de Leibniz.**
Soit $E, F$ et $G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Soit $B$ une application bilinéaire de $E \times F$ dans $G$.
Si $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$ et $g \in \mathcal{C}^k(I, F)$ alors $B(f, g) \in \mathcal{C}^k(I, G)$ et, si $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$B(f,g)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B\big(f^{(j)}, g^{(k-j)}\big).$$

# II. Intégration sur un segment.

## II.1. Fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

**Définition 6.** Une fonction $f$ définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $E$ est dite *continue par morceaux*, s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ :
**1.** la restriction $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$,
**2.** la restriction $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ est prolongeable par continuité à $[x_i, x_{i+1}]$.
Une telle subdivision est dite *adaptée* à $f$.

⚠ Le point 2 équivaut au fait que $\lim\limits_{x_i^+} f$ et $\lim\limits_{x_{i+1}^-} f$ existent (et soient finies).

**Notations.** Nous noterons $\mathcal{CM}([a, b], E)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ et à valeurs dans $E$.

**Remarque 2.**
- $\mathcal{CM}([a, b], E)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{F}([a, b], E)$ des fonctions définies sur $[a, b]$.
- Toute fonction continue sur $[a, b]$ est continue par morceaux sur $[a, b]$, i.e.

$$\mathcal{C}([a, b], E) \subset \mathcal{CM}([a, b], E).$$

**Remarque 3.** Comme dans le cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ on définit la notion de fonctions en escalier.
Une fonction $f$ définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $E$ est dite *en escalier*, s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ est constante.
En notant $\mathcal{E}([a, b], E)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ et à valeurs dans $E$ on obtient :

$$\mathcal{E}([a, b], E) \subset \mathcal{CM}([a, b], E).$$

**Proposition 14.** Une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $E$ est continue par morceaux si, et seulement si, chacune de ses fonctions coordonnées l'est.

**Démonstration.** C'est une conséquence immédiate de la caractérisation de la limite et de la caractérisation de la continuité d'une fonction à l'aide de ses fonctions coordonnées. □

**Proposition 15.** Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans $E$ est bornée.

⚠ Les bornes ne sont pas nécessairement atteintes.

### II.2. Intégrale d'une fonction continue par morceaux.

**Proposition 16.** Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],E)$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$, et soit $f_1, \dots, f_n$ les fonctions coordonnées de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.
Le vecteur $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left( \int_a^b f_i \right) e_i$ ne dépend pas de la base de $E$ choisie.
Ce vecteur est appelé l'intégrale de $f$ sur $[a,b]$ et on note :

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} \left( \int_a^b f_i \right) e_i.$$

**Démonstration.**

□

**Proposition 17. Linéarité de l'intégrale.**
L'application suivante est linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{CM}([a,b],E) & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f \end{array}$$

**Démonstration.** C'est une conséquence immédiate de la linéarité de l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$, que l'on applique aux fonctions coordonnées. □

**Proposition 18.** Soit $L$ une application linéaire de $E$ dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $F$. Si $f \in \mathcal{CM}([a,b],E)$, alors $L \circ f \in \mathcal{CM}([a,b],F)$ et :

$$L\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b L \circ f.$$

**Démonstration.**

$\square$

**Théorème 2. Sommes de Riemann.**
Pour tout $f \in \mathcal{CM}([a,b])$ : $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f.$$

**Démonstration.** C'est une conséquence immédiate de la convergence des sommes de Riemann des fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$, que l'on applique aux fonctions coordonnées. $\square$

**Proposition 19. Inégalité triangulaire.**
Si $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, alors $\|f\|$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ et :

$$\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant \int_a^b \|f\|.$$

**Démonstration.**

□

## III. Intégrale fonction de sa borne supérieure.

**Proposition 20.** Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle $I$, et soit $a \in I$.
La fonction $F_a$ définie sur $I$ par :

$$\forall x \in I,\ F_a(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est continue sur $I$. Plus précisément, sa restriction à tout segment de $I$ est lipschitzienne.

**Démonstration.** Il suffit de montrer que $F_a$ est lipschitzienne sur tout segment de $I$. En effet, $F_a$ sera alors continue sur tout segment de $I$, donc continue sur $I$.

Soit $J$ un segment inclus dans $I$.

La fonction $f$ est alors continue par morceaux sur le segment $J$, donc bornée sur ce segment.

Notons $M = \sup\limits_J \|f\|$. Soit $(x, y) \in J^2$. Supposons par exemple que $x \leqslant y$.

$\|F_a(y) - F_a(x)\| =$

□

**Théorème 3.** Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$, et soit $a \in I$.
La fonction $F_a$ définie sur $I$ par :

$$\forall x \in I,\ F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable sur $I$, de dérivée $F_a' = f$.
Ainsi, $F_a$ est l'unique primitive de $f$ sur $I$ s'annulant en $a$.

**Démonstration.** Il suffit de raisonner sur les fonctions coordonnées. □

**Remarque 4.** Si $f$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable en $-\infty$. Alors, la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $F' = f$.

**Corollaire 2.** Soit $f : I \to E$ une fonction continue, et soit $(a, b) \in I^2$.

Pour toute primitive $F$ de $f$ sur $I$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

**Démonstration.**

□

**Corollaire 3.** Soit $f : I \to E$ une fonction continue sur un intervalle $I$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, et soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ telle que $\varphi([a, b]) \subset I$ alors :

$$\int_a^b \varphi'(x) f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

**Démonstration.**

□

**Théorème 4. Inégalité des accroissements finis.**

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$. S'il existe un réel $k$ tel que : $\forall x \in I,\ \|f'(x)\| \leqslant k$,

alors $f$ est $k$-lipschitzienne i.e. : $\forall (x, y) \in I^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant k|x - y|$.

**Démonstration.**

□

**Interprétation cinématique.** Un véhicule ne dépassant jamais la vitesse instantanée de 60 km/h parcourt en une heure une distance inférieure à 60 km. Par contraposée, si en une heure, il parcourt une distance supérieure à 60 km, alors il existe au moins un instant où sa vitesse instantanée a dépassé 60 km/h.

# IV. Formules de Taylor.

Les formules de Taylor sont des formules, de la forme : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$.

Elles permettent d'approcher des fonctions « régulières », par des fonctions polynomiales.
Nous allons voir trois formules de Taylor (qui vont variées par leur expression du reste $R_n(x)$) : deux formules globales et une formule locale.

## IV.1. Formules de Taylor globales.

**Théorème 5. Formule de Taylor avec reste intégral.**
Soit $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I$. Alors pour tout $x \in I$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \,\mathrm{d}t.$$

**Démonstration.**

Soit $a \in I$. Montrons le théorème par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$.

D'après le théorème fondamental : $\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$.

Donc, la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang $n$.
Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur $I$. En particulier, $f$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I$, donc d'après HR, pour tout $x \in I$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \,\mathrm{d}t.$$

Procédons à une IPP dans l'intégrale ci-dessus, en dérivant $f^{(n+1)}$ et en primitivant $t \mapsto (x-t)^n$, dont une primitive est donnée par $t \mapsto -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$. Cette IPP est justifiée car $f^{(n+1)}$ et $t \mapsto -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ :

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \,\mathrm{d}t &= \left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot \frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_a^x - \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{n!} \cdot \frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1} \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1} \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

□

**Théorème 6. Inégalité de Taylor-Lagrange.**
Soit $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I$. Si $M$ est un majorant de $\left\|f^{(n+1)}\right\|$ sur $I$ alors pour tout $x \in I$ :

$$\left\|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right\| \leqslant \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

**Démonstration.**

Il suffit de majorer le reste dans la formule précédente.

Supposons $a \leqslant x$.

$$\left\|\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, \mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_a^x \frac{\left\|f^{(n+1)}(t)\right\|}{n!}(x-t)^n \, \mathrm{d}t \leqslant \int_a^x \frac{M}{n!}(x-t)^n \, \mathrm{d}t.$$

Or, $\displaystyle\int_a^x \frac{M}{n!}(x-t)^n \, \mathrm{d}t = \frac{M}{n!}\left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_a^x = \frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

□

## IV.2. Formule de Taylor locale.

**Théorème 7. Formule de Taylor-Young.**
Soit $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$. Alors pour tout $x \in I$ :

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big).$$

**Démonstration.** On admettra ce théorème, mais nous pouvons le déduire facilement de l'inégalité de Taylor-Lagrange, à condition de renforcer l'hypothèse, en supposant que $f$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
En effet, dans ce cas, $f^{(n+1)}$ est continue, donc majorée sur tout segment. □