

– TD 18 & 19 : Espaces probabilisés - Indépendance –

Exercice 1. Soit (A_n) une suite d'événements telle que la série $\sum P(A_n)$ converge. Montrer que l'événement

$$B = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p \text{ est négligeable.}$$

Exercice 2. Déterminer une CNS sur la suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour qu'il existe une probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(\{n, n+1, \dots\}) = a_n.$$

Exercice 3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(\{n\}) = \frac{1}{n(n+1)}$.

1. Montrer que l'on définit ainsi une probabilité sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.
2. Calculer la probabilité de l'événement $2\mathbb{N}^*$.

Exercice 4. Soit (A_n) une suite d'événements mutuellement indépendants telle que la série $\sum P(A_n)$ diverge.

Montrer que l'événement $B = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p$ est presque sûr.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant A où A est l'événement « X est pair ».

Exercice 6. Soit B un événement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et soit (A_n) une suite d'événements 2 à 2 incompatibles et tous indépendants de B . Montrer que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est indépendant de B .

Exercice 7. On cherche un trésor et on découvre une pièce contenant n coffres identiques. On note p la probabilité pour que l'ensemble de ces n coffres contienne le trésor. On a déjà ouvert $n-1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il se trouve dans le dernier coffre ?

Exercice 8. Une succession de n individus $I_1, \dots, I_n$ se transmet une information binaire. Chaque individu I_k transmet l'information qu'il a reçu avec la probabilité p à l'individu I_{k+1} ou la transforme en son inverse avec la probabilité $1-p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.

On note A_k l'événement : « I_k reçoit l'information émise par I_1 », et on note $p_k = P(A_k)$.

On note B_k l'événement : « I_k transmet l'information qu'il a reçu».

1. Exprimer p_{k+1} en fonction de p_k .
2. En déduire une expression de p_n en fonction de p et n .
3. On suppose $0 < p < 1$. Quelle est la limite de la suite p_n ? Justifier.

Exercice 9. Une lance indéfiniment un dé équilibré à 6 faces.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir un «six» pour la première fois lors du n -ème lancer.
2. Montrer qu'il est presque certain d'obtenir au moins un «six».
3. Montrer qu'il est presque certain d'obtenir une infinité de «six».

Exercice 10. On considère X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi. On pose $D = X - Y$ et $I = \inf(X, Y)$.

1. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = pq^k$, où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

- a. Déterminer la loi conjointe de (D, I) .
 - b. Déterminer les lois marginales de D et I . Vérifier que D et I sont indépendantes.
2. On suppose que les variables D et I sont indépendantes et que $P(X = n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $p \in]0, 1[$, tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = pq^k$ avec $q = 1 - p$.

Exercice 11. Le nombre X d'enfants d'une famille donnée, est modélisée par la loi $\mathcal{P}(2)$.

1. Quelle est la probabilité, pour une famille donnée, d'avoir au moins une fille ?
2. On suppose qu'une famille a exactement une fille. Quelle est la probabilité pour cette famille d'avoir deux enfants ?

Exercice 12. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes, suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q .

1. Déterminer $P(X > n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la loi de $Z = \inf(X, Y)$.

Exercice 13. Soit $p \in]0, 1[$ et $\lambda > 0$. Soit X et Y deux variables aléatoires sur le même espace probabilisé, et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre λ et que, pour $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = n\}$ est la loi binomiale de paramètre (n, p) . Déterminer la loi de Y .

Exercice 14. On considère une suite de lancers de pile ou face indépendants, la probabilité d'obtenir pile étant $p \in]0, 1[$. On note X et Y respectivement le rang du premier et du deuxième pile.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. En déduire les lois de X et Y .

Exercice 15. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres p et q dans $]0, 1[$. Quelle est la probabilité que la matrice suivante soit diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & -X \end{pmatrix}$$

Exercice 16. Chaîne de Markov.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une *matrice stochastique* i.e. telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, p_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \sum_{1 \leq j \leq N} p_{i,j} = 1.$$

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\llbracket 1, N \rrbracket$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $x_0, \dots, x_{n+1}$ dans $\llbracket 1, N \rrbracket$, on ait :

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n) = p_{x_n, x_{n+1}},$$

à chaque fois que ces probabilités conditionnelles sont bien définies. On dit que (X_n) est une *chaîne de Markov homogène*, et P est appelée *matrice de transition* de la chaîne.

1. Soit x_0 dans $\llbracket 1, N \rrbracket$ tel que $P(X_0 = x_0) \neq 0$.
- a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \llbracket 1, N \rrbracket^n, P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n \mid X_0 = x_0) = p_{x_0, x_1} p_{x_1, x_2} \cdots p_{x_{n-1}, x_n}$.
- b. En déduire que $P(X_n = x_n \mid X_0 = x_0) = p_{x_0, x_n}^{(n)}$, où $p_{x_0, x_n}^{(n)}$ est le coefficient (x_0, x_n) de la matrice P^n .
2. Soit $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \dots, x_{n+k}$ dans $\llbracket 1, N \rrbracket$ tels que $P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) \neq 0$. Montrer que : $P(X_{n+1} = x_{n+1}, \dots, X_{n+k} = x_{n+k} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_{n+1}, \dots, X_k = x_{n+k} \mid X_0 = x_n)$.