

– Chapitre 22 : Équations différentielles linéaires –

En première année, ont été étudiées :

- les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 de la forme :

$$y' + a(t)y = b(t) \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des fonctions continues de } I \text{ dans } \mathbb{K},$$

- les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants de la forme :

$$ay'' + by' + cy = d(t) \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont deux constantes, et } d \text{ une fonction continue de } I \text{ dans } \mathbb{K}.$$

Dans ce chapitre, nous allons notamment :

- pour l'ordre 1, généralisé au cas de fonctions à valeurs vectorielles (dans un espace de dimension finie),
- pour l'ordre 2, généralisé au cas de coefficients non constants,
- étudier l'ordre n en se ramenant à l'ordre 1.

Dans ce chapitre, les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide. Elles sont à valeurs dans un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé E de dimension finie égale à $n \geq 1$. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. RAPPELS DE MPSI.

I.1. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES SCALAIRES D'ORDRE 1.

Théorème 1. Soit a une fonction continue sur I , et soit A une primitive de a sur l'intervalle I . L'ensemble des solutions sur I de l'équation :

$$y' + a(t)y = 0,$$

est l'ensemble des fonctions de la forme :

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \mathbb{K} \\ t &\mapsto \lambda e^{-A(t)}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Proposition 1. Méthode de variation de la constante.

Toute équation différentielle de la forme :

$$y' + a(t)y = b(t)$$

où a et b sont des fonctions continues sur I , possède une solution sur I de la forme $t \mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$ où A est une primitive de a sur I et λ une fonction dérivable sur I .

Méthode.

Pour résoudre $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ (E) :

1. On commence par résoudre l'équation homogène associée : $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ (E_0) .
2. On cherche une solution particulière de l'équation (E) :
 - soit on trouve une solution évidente,
 - soit on utilise la méthode de variation de la constante et/ou le principe de superposition.
3. La solution générale de (E) s'exprime comme somme de la solution particulière trouvée, et de la solution générale de (E_0) .

Proposition 2. Résolution avec condition initiale.

Soit a et b deux fonctions continues sur I . Pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

I.2. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES SCALAIRES D'ORDRE 2.

Dans cette sous-partie, on suppose les coefficients constants.

Théorème 2. Cas complexe.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

- Si l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ a deux racines distinctes r_1 et r_2 , alors les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$

- Si l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ a une racine double r , alors les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t) e^{rt} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Théorème 3. Cas réel.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- Si l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 , alors les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- Si l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ a une racine double r (nécessairement réelle), alors les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t) e^{rt} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- Si l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ a deux racines complexes non réelles (nécessairement conjuguées) alors, en les notant $\alpha \pm i\beta$ les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto (\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)) e^{\alpha t} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Solution particulière dans le cas d'un second membre polynomiale.

On ne suppose pas ici $a \neq 0$ de telle sorte à ce que le résultat puisse aussi s'appliquer dans les cas des équations du 1^{er} ordre à coefficients constants.

Proposition 3. Si P est un polynôme de degré n , alors l'équation $(E) : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = P(t)$ possède une solution particulière polynomiale :

- de degré n si $c \neq 0$,
- de degré $n+1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$,
- de degré $n+2$ si $b = c = 0$ et $a \neq 0$.

Démonstration. On admet cette démonstration, étant donné qu'on la redémontrera à chaque fois. $\square$

Exercice 1. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 2t - 1$.

Solution particulière dans le cas où $d(t) = e^{mt}P(t)$.

On suppose que le second membre est de la forme $d(t) = e^{mt}P(t)$, où P est une fonction polynomiale et m un nombre complexe.

Proposition 4. Si P est un polynôme de degré n et $m \in \mathbb{C}$, alors l'équation :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = e^{mt}P(t) \quad (E)$$

possède une solution particulière de la forme $f(t) = e^{mt}Q(t)$ où Q est un polynôme :

- de degré si
- de degré si
- de degré si

Démonstration.

$\square$

Remarque 1.

- Dans le cas où m est racine simple de $ar^2 + br + c = 0$, la fonction $t \mapsto e^{mt}$ est solution de (E_0) , on peut donc chercher le polynôme Q sans terme constant.
- De même dans le cas où m est racine double de $ar^2 + br + c = 0$, les fonctions $t \mapsto e^{mt}$ et $t \mapsto te^{mt}$ sont solutions de (E_0) , on peut donc chercher le polynôme Q sans terme constant ni terme de degré 1.

Exercice 2. Déterminer une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = (2t - 1)e^{-t}$.

Exercice 3. Déterminer une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = (2t - 1)e^t$.

Exercice 4. Déterminer une solution particulière de $y'' - 2y' + y = (2t - 1)e^t$.

I.3. EXEMPLE D'ÉQUATIONS NON NORMALISÉES : PROBLÈME DE RACCORD.

On souhaite résoudre l'équation $\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)$, où α est une fonction qui s'annule en un point. Partout, où la fonction α ne s'annule pas, on peut diviser par α pour se ramener à une *forme normalisée* ou *forme résolue* (coefficient devant y' égale à 1).

Mais les résultats précédents ne s'appliquent que sur des intervalles. On doit d'abord résoudre l'équation sur chaque intervalle où α ne s'annule pas, puis étudier le problème de *raccord* ou de *recollement*.

Exercice 5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $ty' + y = 0$.

Exercice 6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $ty' - 2y = t^3$.

Méthode. Supposons que α s'annule en 0, et que $I = \mathbb{R}$.

1. Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

2. Analyse.

a. On prend une solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation. Comme elle est, a fortiori, solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ on écrit son expression sur $\mathbb{R}^*$. Elle fait intervenir deux constantes λ_1 et λ_2 .

b. Soit par un calcul de limite en 0, soit en utilisant l'équation, on complète l'expression précédente en déterminant $f(0)$.

c. En utilisant la continuité de f en 0, et la dérivabilité de f en 0 on essaye d'obtenir des informations sur λ_1 et λ_2 . *Cette partie n'est pas toujours possible.*

3. Synthèse.

a. Réciproquement, on définit f par la dernière expression obtenue dans la partie analyse, et on va prouver que c'est bien une solution de l'équation sur $\mathbb{R}$.

b. Comme f est de la forme obtenue dans la partie 1, f est bien une solution de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ (en particulier, elle dérivable sur $\mathbb{R}^*$).

c. On montre que f est dérivable en 0.

d. On montre que f satisfait l'équation en 0.

II. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES VECTORIELLES D'ORDRE 1.

II.1. DÉFINITIONS.

Définition 1.

- On appelle *équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre* toute équation du type :

$$x' = a(t)(x) + b(t) \quad (E)$$

d'inconnue x où $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \rightarrow E$ sont deux fonctions continues.

- La fonction b est appelée *second membre* de (E) .
- Si b est la fonction nulle, l'équation (E) est dite *homogène* ou *sans second membre*.
- On appelle *équation homogène* associée à (E) , l'équation :

$$x' = a(t)(x) \quad (E_0)$$

⚠ Pour alléger les notations, l'équation (E) peut être notée : $x' = a(t) \cdot x + b(t)$.

Définition 2. On appelle *solution* de l'équation (E), toute fonction $f : I \rightarrow E$ dérivable sur I , telle que :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = a(t)(f(t)) + b(t).$$

Proposition 5. Toute solution de l'équation (E) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Démonstration.

Définition 3. On appelle *système différentiel linéaire du premier ordre* toute équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme :

$$X' = A(t)X + B(t), \quad (E)$$

d'inconnue $X : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ où $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ sont deux fonctions continues.

Un tel système s'écrit aussi :

$$\left\{ \begin{array}{lclclcl} x'_1 & = & a_{1,1}(t)x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}(t)x_n & + & b_1(t) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ x'_n & = & a_{n,1}(t)x_1 & + & \cdots & + & a_{n,n}(t)x_n & + & b_n(t) \end{array} \right.$$

où les $a_{i,j}$ et les b_i sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

II.2. PROBLÈME DE CAUCHY.

Définition 4. On appelle *problème de Cauchy* tout système de la forme :

$$\begin{cases} x' &= a(t)(x) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad \text{où } (t_0, x_0) \in I \times E.$$

Proposition 6. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.

Soit $(t_0, x_0) \in I \times E$. Une fonction $f : I \rightarrow E$ est solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' &= a(t)(x) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

si, et seulement si, elle est continue sur I et vérifie :

$$\forall t \in I, f(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(s)(f(s)) \, ds + \int_{t_0}^t b(s) \, ds.$$

Démonstration.

□

II.3. STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS.

Proposition 7. Structure de l'ensemble des solutions.

- L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions sur I de l'équation homogène (E_0) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$.
- L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur I de l'équation homogène (E) est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$ dirigé par $\mathcal{S}_0$. Autrement-dit, pour toute solution particulière f_p de (E) , on a :

$$\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_0 = \{f_p + f \mid f \in \mathcal{S}_0\}.$$

Démonstration.

□

Proposition 8. Principe de superposition des solutions.

Soit b_1 et b_2 deux fonctions continues sur I et $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$ telles que $b = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$.

Si f_1 et f_2 sont respectivement solutions des équations :

$$x' = a(t)(x) + b_1(t) \quad \text{et} \quad x' = a(t)(x) + b_2(t),$$

alors $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ est une solution de $x' = a(t)(x) + b(t)$.

II.4. LE THÉORÈME DE CAUCHY LINÉAIRE.

Théorème 4. Théorème de Cauchy linéaire.

Soit $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \rightarrow E$ deux fonctions continues.

Pour tout $(t_0, x_0) \in I \times E$, il existe une unique solution définie sur I au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' &= a(t)(x) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Démonstration. Admis.

□

Ce théorème a été prouvé en 1^{ère} année dans le cas particulier des équations linéaires scalaires (prop 2).

Remarque importante. Si deux solutions f_1 et f_2 de (E) sur I coïncident en un point t_0 , alors elles sont confondues. En effet :

Corollaire 1. Soit $\mathcal{S}_0$ l'espace vectoriel des solution de l'équation homogène $x' = a(t)(x)$ (E_0).

Pour tout $t_0 \in I$, l'application :

$$\begin{aligned} E_0 &: \mathcal{S}_0 \rightarrow E \\ f &\mapsto f(t_0) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier : $\dim \mathcal{S}_0 = \dim E$.

III. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SCALAIRES LINÉAIRES D'ORDRE n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 5.

- On appelle *équation différentielle scalaire linéaire d'ordre n* toute équation du type :

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} = b(t) \quad (E)$$

d'inconnue x où pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $a_k : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont des fonctions continues.

- La fonction b est appelée *second membre* de (E) .
- Si b est la fonction nulle, l'équation (E) est dite *homogène* ou *sans second membre*.
- On dit que l'équation (E) est à *coefficients constants* si toutes les fonctions a_k sont constantes.
- On appelle *équation homogène associée à (E)* , l'équation :

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} = 0 \quad (E_0)$$

Définition 6. On appelle *solution* de l'équation (E) , toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, n fois dérivable sur I , telle que :

$$\forall t \in I, f^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)f^{(k)}(t) = b(t).$$

Proposition 9. Toute solution de l'équation (E) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Démonstration. $f^{(n)}$ est une combinaison linéaire de fonctions continues sur I . □

⚠ L'équation (E) ci-dessus est dite *normalisée* parce que le coefficient devant $x^{(n)}$ vaut 1. Si l'équation n'est pas normalisée mais que le coefficient devant $x^{(n)}$ ne s'annule jamais, on peut se ramener à une forme normalisée. Si ce coefficient s'annule en au moins un point, on a alors à faire à ce qu'on appelle : un *problème de raccord*.

Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel.

Le but de ce qui suit est de ramener l'étude des équations différentielles scalaires d'ordre n à celle des systèmes différentiels du premier ordre, afin de pouvoir utiliser les résultats de la partie précédente.

Traisons le cas $n = 3$. On s'intéresse à l'équation scalaire :

$$x^{(3)} + a_0(t)x + a_1(t)x' + a_2(t)x'' = b(t) \quad (E).$$

Cette équation s'écrit matriciellement :

On obtient ainsi :

Proposition 10. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est solution de l'équation

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} = b(t) \quad (E)$$

si, et seulement si, la fonction $\Phi : t \mapsto \begin{pmatrix} f(t) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ est solution du système différentiel d'ordre 1 $X' = A(t)X + B(t)$, avec :

$\triangleleft A(t)$ est la transposée de la matrice compagnon du polynôme $X^n + a_{n-1}(t)X^{n-1} + \dots + a_0(t)$.
Les résultats de la partie précédente s'appliquent à ce cas particulier de système différentiel.

Proposition 11. Structure de l'ensemble des solutions.

- L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions sur I de l'équation homogène (E_0) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.
- L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur I de l'équation (E) est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ dirigé par $\mathcal{S}_0$. Autrement-dit, pour toute solution particulière f_p de (E) , on a :

$$\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_0 = \{f_p + f \mid f \in \mathcal{S}_0\}.$$

Théorème 5. Théorème de Cauchy linéaire.

Pour tout $t_0 \in I$ et $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, il existe une unique solution sur I au problème de Cauchy :

$$(S) \quad \begin{cases} x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} &= b(t) \\ \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, x^{(k)}(t_0) &= x_k \end{cases}$$

Démonstration.

□

Corollaire 2. Soit $\mathcal{S}_0$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} = 0 \quad (E_0)$$

Pour tout $t_0 \in I$, l'application :

$$\begin{aligned} E_0 : \mathcal{S}_0 &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ f &\mapsto (f(t_0), f'(t_0), \dots, f^{(n-1)}(t_0)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier : $\dim \mathcal{S}_0 = n$.

IV. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES SCALAIRES D'ORDRE 2.

Dans cette partie nous étudions une équation linéaire scalaire du second ordre de la forme :

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \quad (E)$$

où a_0, a_1 et b sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. D'après les résultats de la partie précédente :

1. L'espace vectoriel $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E) est de dimension 2.
2. Pour toute solution particulière f_p de (E) , on a :

$$\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_0 = \{f_p + f \mid f \in \mathcal{S}_0\}.$$

3. D'après, le théorème de Cauchy linéaire il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$$

pour tout $(t_0, x_0, x_1) \in I \times \mathbb{K}^2$.

IV.1. WRONSKIEN D'UN COUPLE DE SOLUTIONS.

Définition 7. Soit f_1 et f_2 deux solutions de l'équation homogène (E_0) .

On appelle *wronskien* de f_1 et f_2 l'application :

$$\begin{aligned} W : I &\rightarrow \mathbb{K} \\ t &\mapsto \det \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{pmatrix} = f_1(t)f_2'(t) - f_1'(t)f_2(t). \end{aligned}$$

Remarque 3. Comme f_1 et f_2 sont solutions de (E_0) , elles sont deux fois dérivables, donc W est dérivable sur I et :

$$W' =$$

Proposition 12. Le wronskien de deux solutions f_1 et f_2 de l'équation homogène (E_0) est solution sur I de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :

$$x' + a_1(t)x = 0.$$

Démonstration.

□

Le wronskien est un outil qui permet de caractériser les bases de solutions :

Proposition 13. Soit f_1 et f_2 des solutions de (E_0) et soit W leur wronskien. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. (f_1, f_2) est une base de $\mathcal{S}_0$,
2. $\forall t \in I, W(t) \neq 0$,
3. $\exists t \in I, W(t) \neq 0$.

Démonstration.

□

Exercice 7. On admet que $\cos(\ln)$ et $\sin(\ln)$ sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation : $t^2 x'' + tx' + y = 0$. Montrer que $(\cos(\ln), \sin(\ln))$ est une base de $\mathcal{S}_0$.

IV.2. MÉTHODE DE VARIATION DES CONSTANTES.

On suppose connaître une base (f_1, f_2) de solutions de l'équation homogène :

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0 \quad (E_0)$$

La méthode de variation des constantes consiste alors à chercher une solution particulière de :

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \quad (E)$$

sous la forme : $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ où λ_1 et λ_2 sont deux fonctions dérivables.

Proposition 14. Soit (f_1, f_2) une base de solutions sur I de l'équation homogène (E_0) . Il existe au moins une solution de (E) sur I de la forme :

$$f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2,$$

où λ_1 et λ_2 sont deux fonctions dérivables sur I .

Une condition suffisante pour que f soit solution de (E) sur I est que pour tout $t \in I$:

$$\begin{cases} f_1(t)\lambda_1'(t) + f_2(t)\lambda_2'(t) = 0 \\ f_1'(t)\lambda_1(t) + f_2'(t)\lambda_2(t) = b(t) \end{cases}$$

A On détermine alors λ_1' et λ_2' puis on primitive pour obtenir λ_1 et λ_2 .

Exercice 8. Résoudre sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'équation :

$$x'' + x = \tan(t) \quad (E)$$

IV.3. RECHERCHE DE SOLUTIONS DÉVELOPPABLES EN SÉRIE ENTIÈRE.**Exercice 9.** Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ développables en séries entières de l'équation :

$$tx'' + 2x' + tx = 0 \quad (E_0).$$

IV.4. MÉTHODE DU WRONSKIEN.

On souhaite résoudre l'équation homogène :

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0 \quad (E_0).$$

On suppose déjà connaître une solution f_1 ne s'annulant pas sur I .

On sait que $\dim \mathcal{S}_0 = 2$. Il reste donc à trouver une autre solution f de (E_0) non proportionnelle à f_1 .

On peut alors calculer :

$$\left(\frac{f}{f_1} \right)' =$$

On détermine alors le wronskien (à une constante multiplicative près) en résolvant l'équation d'ordre 1 :

$$x' + a_1(t)x = 0.$$

En primitivant, on obtient alors une expression de $\frac{f}{f_1}$ puis de f .

Exercice 10. On reprend l'équation de l'exercice précédent :

$$tx'' + 2x' + tx = 0 \quad (E_0).$$

À l'aide de la solution obtenue à l'exercice précédent, déterminer une base de solutions de (E_0) sur $]0, \pi[$.

V. EXPONENTIELLE D'UN ENDOMORPHISME, D'UNE MATRICE.

V.1. GÉNÉRALITÉS.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit E un espace vectoriel normé de dimension finie égale à n .

Rappel. Soit (a_n) une suite d'éléments de E .

La série $\sum a_n$ est dite *absolument convergente* si la série $\sum \|a_n\|$ est convergente.

Toute série absolument convergente est convergente.

Proposition 15. Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. La série de terme général $\frac{a^k}{k!}$ est absolument convergente. On appelle *exponentielle de a* et l'on note $\exp(a)$ ou e^a la somme de cette série :

$$\exp(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}.$$

$\triangleleft$ La série de terme général $\frac{a^k}{k!}$ est convergente, ce qui signifie, que sa somme appartient à $\mathcal{L}(E)$ i.e. $\exp(a) \in \mathcal{L}(E)$.

Démonstration.

□

On obtient de même :

Proposition 16. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La série de terme général $\frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente. On appelle *exponentielle de A* et l'on note $\exp(A)$ ou e^A la somme de cette série :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

$\triangleleft$ La série de terme général $\frac{A^k}{k!}$ est convergente, ce qui signifie, que sa somme appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i.e. $\exp(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 4. Si N est une matrice nilpotente d'indice d , alors :

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{N^k}{k!}.$$

Proposition 17. Si A est la matrice d'un endomorphisme a dans une base $\mathcal{B}$ de E , alors $\exp(A)$ est la matrice dans $\mathcal{B}$ de $\exp(a)$.

Démonstration.

□

V.2. EXPONENTIELLE ET RÉDUCTION.

Proposition 18. Soit A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\exp(A)$ et $\exp(B)$ sont semblables. Plus précisément, s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$, alors :

$$\exp(A) = P \exp(B) P^{-1}.$$

Démonstration.

□

Proposition 19. Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale. Alors :

$$\exp(D) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}).$$

⚠ Ce résultat se généralise facilement aux matrices diagonales par bloc.

Démonstration.

□

Corollaire 3. Soit A est une matrice diagonalisable que l'on écrit : $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors :

$$\exp(A) = P \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P^{-1}.$$

Proposition 20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors, le spectre de $\exp(A)$ est donné par :

$$\text{sp}(\exp(A)) = \{e^\lambda \mid \lambda \in \text{sp}(A)\}.$$

Plus précisément, si les valeurs propres de A , comptées avec ordre de multiplicité (algébrique), sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors celles de $\exp(A)$ sont $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$.

⚠ La fonction $z \mapsto e^z$ n'est pas injective sur $\mathbb{C}$:

Exemple 1. Si $A = \text{diag}(2i\pi, 4i\pi)$, alors $\exp(A) = I_2$.

Les valeurs propres de A , comptées avec ordre de multiplicité, sont $2i\pi$ et $4i\pi$.

Celles de $\exp(A)$ sont 1 et 1.

Démonstration.

□

⚠ La proposition précédente est fausse sur $\mathbb{R}$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'inclusion suivante reste vraie :

$$\{e^\lambda \mid \lambda \in \text{sp}_{\mathbb{R}}(A)\} \subset \text{sp}_{\mathbb{R}}(\exp(A)),$$

mais l'inclusion inverse n'est pas toujours vérifiée. Voir l'exemple :

Exercice 11. Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le spectre réel de A et celui de $\exp(A)$.

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ . Montrer que X un vecteur propre de $\exp(A)$ associé à la valeur propre e^λ .

Exercice 13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer $\det(\exp(A))$.

V.3. RÉGULARITÉ DE L'EXPONENTIELLE.

Proposition 21.

Les applications : $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \rightarrow & \mathcal{L}(E) \\ a & \mapsto & \exp(a) \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & \exp(A) \end{array}$ sont continues.

Démonstration.

□

Proposition 22. Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. L'application :

$$\begin{aligned}\varphi &: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ t &\mapsto \exp(ta)\end{aligned}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = a \circ (\exp(ta)) = (\exp(ta)) \circ a.$$

Démonstration.

□

On obtient de même :

Proposition 23. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application :

$$\begin{aligned}\varphi &: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t &\mapsto \exp(tA)\end{aligned}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = A \exp(tA) = \exp(tA) A.$$

Remarque 5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $t \in \mathbb{R}$ et X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

V.4. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DE L'EXPONENTIELLE.

Lemme. Si les deux endomorphismes a et b commutent, alors : $\exp(a)$ et b commutent.

Démonstration.

□

Proposition 24.

- Soit $(a, b) \in \mathcal{L}(E)^2$. Si les deux endomorphismes a et b commutent, alors :

$$\exp(a + b) = \exp(a) \circ \exp(b) = \exp(b) \circ \exp(a).$$

- Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si les deux matrices A et B commutent, alors :

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A).$$

Démonstration.

□

Proposition 25.

- Pour tout $a \in \mathcal{L}(E)$, $\exp(a) \in \text{GL}(E)$ et : $\exp(a)^{-1} = \exp(-a)$.
- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et : $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Démonstration.

□

VI. SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES HOMOGENES À COEFFICIENTS CONSTANTS.

VI.1. GÉNÉRALITÉS.

Définition 8. On appelle *équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants* toute équation du type :

$$x' = a(x) + b(t) \quad (E)$$

d'inconnue x où $a \in \mathcal{L}(E)$ et où $b : I \rightarrow E$ est une fonction continue.

Si $\mathcal{B}$ est une base de E et si A et $B(t)$ sont respectivement les matrices de a et $b(t)$ dans la base $\mathcal{B}$, alors l'équation (E) s'écrit matriciellement :

$$X' = AX + B(t)$$

Proposition 26. Résolution du problème de Cauchy.

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$, l'application :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow E \\ t &\mapsto \exp((t - t_0)a)(x_0) \end{aligned}$$

est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy homogène à coefficients constants :

$$\begin{cases} x' &= a(x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Démonstration.

□

Version matricielle :

Proposition 27. Résolution du problème de Cauchy.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $(t_0, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$, l'application :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n \\ t &\mapsto \exp((t - t_0)A)X_0 \end{aligned}$$

est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy homogène à coefficients constants :

$$\begin{cases} X' &= AX \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$$

Exercice 14. Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' &= AX \\ X(0) &= X_0 \end{cases}$$

dans le cas où X_0 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

L'unique solution sur $\mathbb{R}$ est donnée par : $X(t) =$

L'unique solution sur $\mathbb{R}$ est donc donnée par : $X(t) =$

△ La réciproque est vraie. En effet, supposons que la fonction ci-dessus est solution.

VI.2. RÉOLUTION PRATIQUE DE L'ÉQUATION HOMOGÈNE QUAND A EST DIAGONALISABLE

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. On s'intéresse ici à la résolution pratique de l'équation homogène :

$$X' = AX. \quad (E_0)$$

On a vu que les solutions de l'équation homogène sont toutes de la forme :

$$X(t) = \exp(tA)C \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{K}^n \text{ est une constante.}$$

La matrice A est supposée diagonalisable. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A , comptées avec ordre de multiplicité.

On vient d'établir le résultat que l'on utilisera en pratique dans le cas diagonalisable :

Théorème 6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base de vecteurs propres de A , et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres respectives.

Les solutions de l'équation homogène $X' = AX$ sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} X_i \quad \text{avec} \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n.$$

On peut retrouver ce résultat rapidement, sans utiliser l'exponentielle de matrices :

VI.3. MÉTHODE DE VARIATION DE LA CONSTANTE.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ une fonction continue. On souhaite maintenant déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre :

$$X' = AX + B(t). \quad (E)$$

On a vu que les solutions de l'équation homogène sont toutes de la forme :

$$X(t) = \exp(tA)C \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{K}^n \text{ est une constante.}$$

Le principe est de chercher une solution de la forme $X(t) = \exp(tA)C(t)$ où $C : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ est une fonction dérivable.

$$X'(t) = AX(t) + B(t) \Leftrightarrow$$