

– Programme de colle n° 19 : du 16 au 20/03 –

Les exercices et les questions de cours portent sur tout ce qui suit.

– CHAPITRE 20: ESPÉRANCE ET VARIANCE –

**I. ESPÉRANCE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE RÉELLE OU COMPLEXE.**

**I.1. Définition.**


Soit  $X$  une variable aléatoire discrète, à valeurs dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ .

On appelle *espérance* de  $X$ , et l'on note  $E(X)$ , la somme de la famille  $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

Pour tout événement  $A$ ,  $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$ .

On note  $L^1(\Omega, \mathbb{K})$  l'ensemble des variables aléatoires discrètes d'espérance finie.

Si  $X$  est une variable à valeurs dans  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , alors :  $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$ . 

**I.2. Espérance des lois usuelles.**

**I.3. Propriétés de l'espérance.**

Formule de transfert : Soit  $X$  une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble quelconque et  $f$  est une application de  $X(\Omega)$  dans  $\mathbb{C}$ .

Alors la variable aléatoire  $f(X)$  est d'espérance finie si, et seulement si, la famille  $(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable. Dans ce cas :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x).$$

La formule de transfert appliquée au couple  $Z = (X, Y)$  s'écrit de la forme :

$$E(f(X, Y)) = \sum_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} f(x, y)P(X = x, Y = y).$$

Inégalité triangulaire. Linéarité de l'espérance.

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle positive. Alors : 


1.  $E(X) \geq 0$ ,

2.  $E(X) = 0$  si, et seulement si,  $P(X = 0) = 1$ . On dit alors que  $X$  est *presque sûrement nulle*.

Croissance de l'espérance.

Espérance d'un produit  $XY$  de deux variables aléatoires discrètes.

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes et d'espérance finie, alors  $XY$  est d'espérance finie et :

$$E(XY) = E(X)E(Y) \quad \text{$$

## II. VARIANCE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE RÉELLE.

### II.1. Définition.

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  admet un moment d'ordre 2 si la variable aléatoire  $X^2$  est d'espérance finie.

Par définition :  $X \in L^2(\Omega, \mathbb{R}) \Leftrightarrow X^2 \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ .

**Inégalité de Cauchy-Schwarz.** Si  $(X, Y) \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$  alors  $XY \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$  et :  $E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$ .

Il y a égalité si, et seulement si,  $X$  et  $Y$  sont proportionnelles presque sûrement.

Définition de la *variance* et de *écart type* d'une variable aléatoire discrète  $X \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ .

### II.2. Propriétés de la variance.

$$V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 P(X = x).$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

$V(X) \geq 0$  et  $V(X) = 0$  si, et seulement si, il existe un réel  $m$  tel que  $P(X = m) = 1$ .

### II.3. Variance des lois usuelles.

### II.4. Covariance de deux variables aléatoires réelles.

Pour  $(X, Y) \in (L^2(\Omega, \mathbb{R}))^2$ . On définit :  $\text{Cov}(X, Y) = E\left((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))\right)$ .

L'application  $\text{Cov}$  est une forme bilinéaire symétrique positive !

**Formule de Koenig-Huygens.** Si  $(X, Y) \in (L^2(\Omega, \mathbb{R}))^2$ , alors :  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ .

Si  $(X, Y) \in (L^2(\Omega, \mathbb{R}))^2$  alors :  $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$ .

Si  $(X, Y) \in (L^2(\Omega, \mathbb{R}))^2$  et si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors :  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  et  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ .

Si  $(X_1, \dots, X_n) \in (L^2(\Omega, \mathbb{R}))^n$  alors :  $V(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$ .

Si de plus, les variables aléatoires sont 2 à 2 indépendantes alors :  $V(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k)$ .

△ On en déduit une autre preuve de la variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ .

## III. INÉGALITÉS PROBABILISTES ET LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES.

Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev. 

Loi faible des grands nombres. 


#### IV. FONCTIONS GÉNÉRATRICES.

Si  $X$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  :  $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) t^k$ .

La convergence est normale sur  $[-1, 1]$ . 

La fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  caractérise la loi.

Une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  est d'espérance finie si, et seulement si,  $G_X$  est dérivable en 1.

Dans ce cas, on a :  $E(X) = G'_X(1)$ . 

$\triangle$  On ne démontre qu'un sens de l'implication.

Une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  appartient à  $L^2(\Omega, \mathbb{R})$  si, et seulement si,  $G_X$  est deux fois dérivable en 1. Dans ce cas, on a :  $G''_X(1) = E(X(X-1))$ .

Dans ce cas, on a :  $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$ .

Fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires indépendantes.

$\triangle$  **À connaître parfaitement :**

$X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$	$E(X) = \frac{n+1}{2}$	$V(X) = \frac{n^2-1}{12}$	$G_X(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n t^k$
$X \sim \mathcal{B}(p)$	$E(X) = p$	$V(X) = pq$	$G_X(t) = q + pt$
$X \sim \mathcal{B}(n, p)$	$E(X) = np$	$V(X) = npq$	$G_X(t) = (q + pt)^n$
$X \sim \mathcal{G}(p)$	$E(X) = \frac{1}{p}$	$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$	$G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}$
$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$E(X) = \lambda$	$V(X) = \lambda$	$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$