

Rappel. Une fonction vectorielle φ est dérivable en 0 si, et seulement si, il existe un vecteur ℓ tel que :

$$\varphi(t) \underset{0}{=} \ell t$$

Dans ce cas on a :

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2y^3$. Montrer qu'elle admet des dérivées selon tout vecteur au point $(1, 1)$.

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = M^2$. Montrer qu'elle admet, en tout point $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des dérivées selon tout vecteur $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4. Montrer que la fonction \exp définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, admet, en 0 des dérivées selon tout vecteur $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

⚠ L'existence de dérivées en a selon tout vecteur n'est pas une bonne condition de régularité de la fonction au point a . Par exemple, une fonction peut avoir des dérivées en a selon tout vecteur sans pour autant être continue en a .

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f admet une dérivée en $(0, 0)$ selon tout vecteur, mais qu'elle n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 6. Montrer qu'une norme $\| \cdot \|$ sur E n'admet en 0 des dérivées selon aucun vecteur $h \neq 0$.

Remarque importante. Si l'on fixe une base \mathcal{B} de l'espace d'arrivée F , on sait que l'on peut considérer les applications composantes (f_1, \dots, f_n) de f dans cette base.

L'existence d'une dérivée en a selon un vecteur h , équivaut alors à l'existence de cette dérivée en a selon h de chacune des applications coordonnées.

Les coordonnées du vecteur $D_h f(a)$ dans la base \mathcal{B} sont alors :

Cette remarque dit qu'on peut donc se ramener à étudier la dérivation d'une fonction de la variable réelle à valeurs dans \mathbb{R} .

I.2. DÉRIVÉE PARTIELLE.

Définition 2. Soit f une fonction définie sur un ouvert U de E . Soit $a \in U$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on appelle i -ème *dérivée partielle* de f en a dans la base \mathcal{B} , lorsqu'elle existe, la dérivée de f en a selon le vecteur e_i .

On la note alors :

$$\partial_i f(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Lorsque la i -ème dérivée partielle de f en a existe, et en notant $\varphi : t \mapsto f(a + te_i)$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) =$$

Remarque importante. Par définition, les dérivées partielles dépendent du choix de la base. Dans le cas $E = \mathbb{R}^n$, on choisira implicitement la base canonique.

Dans le cas particulier $E = \mathbb{R}^2$ on préférera noter $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ les dérivées partielles.

En notant (x, y) les coordonnées d'un vecteur a de U dans la base canonique, on aura, lorsqu'elles existent :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) =$$

où g est l'application :

De même :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) =$$

où h est l'application :

Exemple 2. La fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 y^3$ admet des dérivées partielles en tout point (x, y) de \mathbb{R}^2 . Elles sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$$

Remarque importante. Lorsqu'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est fixée, on peut identifier n'importe quel vecteur x par ses coordonnées (x_1, \dots, x_n) dans cette base. On s'autorisera ainsi à identifier :

$$f(x) \quad \text{et} \quad f(x_1, \dots, x_n).$$

En notant (a_1, \dots, a_n) les coordonnées d'un vecteur a de U dans la base choisie, on aura par exemple, lorsqu'elle existe :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) =$$

Reprenons la fonction du premier exercice, dont nous avons montré qu'elle n'est pas continue en $(0, 0)$:

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f admet en $(0, 0)$ des dérivées partielles que l'on calculera.
2. Montrer que f n'admet en $(0, 0)$ de dérivée selon aucun vecteur $h = (h_1, h_2)$ avec $h_1 \neq 0$ et $h_2 \neq 0$.

II. DIFFÉRENTIELLE D'UNE FONCTION EN UN POINT.

II.1. NOTATIONS o ET O .

On rappelle que E et F désignent deux \mathbb{R} -espaces vectoriels normés de dimension finie.

Définition 3. Soit U un ouvert de E contenant 0 et soit φ une fonction de U dans F .

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, on écrit $\varphi(h) \underset{0}{=} o(\|h\|^k)$ lorsqu'il existe un voisinage V de 0 , contenu dans U , et une fonction $\varepsilon : V \rightarrow F$ tels que :

$$\forall h \in V, \varphi(h) = \|h\|^k \varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on écrit $\varphi(h) \underset{0}{=} O(\|h\|^k)$ lorsqu'il existe un voisinage V de 0 , contenu dans U , et une constante $M > 0$ tels que :

$$\forall h \in V, \|\varphi(h)\| \leq M \|h\|^k.$$

3. Dans le cas où $k = 1$ on écrira simplement $\varphi(h) \underset{0}{=} o(h)$ et $\varphi(h) \underset{0}{=} O(h)$.

Remarque 4. Si $\varphi(h) \underset{0}{=} O(\|h\|^2)$ alors $\varphi(h) \underset{0}{=} o(h)$.

Remarque 5. Pour $k = 0$ on retrouve les équivalences bien connues :

- $\varphi(h) \underset{0}{=} o(1) \Leftrightarrow$
- $\varphi(h) \underset{0}{=} O(1) \Leftrightarrow$

II.2. DIFFÉRENTIELLE EN UN POINT.

Soit U un ouvert de E et f une application de E dans F .

Définition 4. Soit $a \in U$. On dit que f est *différentiable* en a s'il existe une application linéaire u de E dans F telle que l'on ait :

$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + u(h) + o(h).$$

Lorsqu'elle existe l'égalité ci-dessus est appelée *développement limité à l'ordre 1* de f en a .

L'égalité ci-dessus est appelée *développement limité à l'ordre 1* en a .

Remarque 6. De manière équivalente, f est différentiable en a si, et seulement si, il existe une application linéaire u de E dans F telle que l'on ait :

$$\frac{f(a+h) - f(a) - u(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} 0_F.$$

Remarque 7. En notant (f_1, \dots, f_n) les fonctions coordonnées de f dans une base de F , on obtient que f est différentiable en a si, et seulement si, toutes les f_i le sont.

Cela nous permet, si besoin, de nous ramener au cas d'une fonction à valeurs réelles.

Exercice 8. Montrer que la fonction f définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = M^2$ est différentiable en tout point M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 1. Si f est différentiable en a , alors f est continue en a .

Démonstration.

□

Théorème 1. Supposons f différentiable en a , i.e. supposons l'existence d'une application linéaire u de E dans F telle que :

$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + u(h) + o(h).$$

Alors, l'application linéaire u est unique. Elle est appelée la *différentielle* de f en a et notée $df(a)$.

De plus, f admet une dérivée au point a selon tout vecteur h et on a :

$$\begin{aligned} df(a) &: E \rightarrow F \\ h &\mapsto D_h f(a) \end{aligned}$$

△ L'application linéaire $df(a)$ est aussi appelée *application linéaire tangente* à f en a .

Notations. Lorsque f est différentiable en a , et si $h \in E$, le vecteur $df(a)(h)$ sera noté $df(a) \cdot h$.
On retiendra ainsi :

Et le développement limité à l'ordre 1 de f en a s'écrit ainsi :

Démonstration.

□

Exemple 3. Une norme $\|\cdot\|$ sur E n'est jamais différentiable en 0, puisqu'elle n'admet en 0 des dérivées selon aucun vecteur $h \neq 0$ (voir page 3).

Proposition 2. Différentielle d'une application linéaire.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est différentiable en tout point $a \in E$ et :

$$\forall a \in E, df(a) =$$

Démonstration.

□

Proposition 3. Supposons f différentiable en a et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

1. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $df(a) \cdot e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

2. Soit $h \in E$. Notons (h_1, \dots, h_n) ses coordonnées dans la base \mathcal{B} . Alors :

$$df(a) \cdot h = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Démonstration.

□

Corollaire 1. L'existence de toutes ses dérivées partielles en a est une condition nécessaire pour que f soit différentiable en a . Dans ce cas, f sera différentiable en a si, et seulement si :

$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + o(h).$$

Méthode. Pour prouver que f est différentiable en a , on pourra commencer par prouver l'existence de toutes ses dérivées partielles en a , les calculer, puis calculer :

$$f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a),$$

afin de prouver que ce vecteur est un $o(h)$ au voisinage de 0.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^3}{x^2 + y^4} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f admet en $(0, 0)$ des dérivées selon tout vecteur mais qu'elle n'est pas différentiable en ce point.

Cas particulier des fonctions de la variable réelle.

La proposition suivante fait le lien entre les notions de dérivabilité et de différentiabilité, pour des fonctions de la variable réelle.

Proposition 4. Soit U un ouvert de \mathbb{R} et f une fonction de U dans F . Soit $a \in U$.

La fonction f est différentiable en a si, et seulement si, f est dérivable en a .

Dans ce cas, l'application linéaire $df(a)$ est donnée par :

$$df(a) : \begin{array}{l} \rightarrow \\ \mapsto \end{array}$$

En particulier, $f'(a) =$

Démonstration.

□

II.3. MATRICE JACOBIENNE.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base de F .

Soit U un ouvert de E et $a \in U$. Soit f une fonction de U dans F . Notons (f_1, \dots, f_n) les fonctions coordonnées de f dans la base \mathcal{B}' .

Proposition 5. Si f est différentiable en a , alors la matrice de $df(a)$ relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' est donnée par :

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} df(a) =$$

Démonstration.

□

Définition 5. Dans le cas particulier où U est un ouvert de \mathbb{R}^p et f une application de U dans \mathbb{R}^n différentiable en un point a de U , la matrice de $df(a)$ relativement aux bases canoniques de \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^n est appelée *la matrice jacobienne* de f en a . On la note $J_a(f)$.

△ Dans ce cas particulier, on peut écrire : $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Exemple 4. La matrice jacobienne au point (r, θ) de l'application $(r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ est donnée par :

II.4. GRADIENT D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE.

Dans cette section, E est un espace euclidien et $F = \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur un ouvert U de E et à valeurs dans \mathbb{R} . Soit $a \in U$.

Dans ce cas particulier, si f est différentiable en a , alors $df(a)$ est une forme linéaire définie sur E , donc

△ Le théorème de représentation de Riesz s'applique car E est supposé de dimension finie.

Définition 6. Si f est différentiable en a , on appelle *gradient* de f en a et on note $\nabla f(a)$ ou $\text{grad } f(a)$ l'unique vecteur de E tel que :

$$\forall h \in E, df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle.$$

Remarque importante. Le développement limité à l'ordre 1 au point a peut se réécrire :

Proposition 6. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E , et si f est différentiable en a , alors :

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i.$$

Démonstration.

□

Proposition 7. Interprétation géométrique du gradient.

Si f est différentiable en a et si $\nabla f(a) \neq 0_E$, alors $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

Démonstration.

□

△ Concrètement, en un point a fixé, le gradient indique la direction de “variation maximale” de f , et la norme du gradient indique l’intensité de cette variation.

Remarque 9. En *topographie*, supposons que le relief d’une montagne soit représenté par le graphe d’une fonction f de deux variables qui soit différentiable en tout point : l’altitude d’un point de coordonnées (x, y) est $z = f(x, y)$. En tout point, le gradient de f indique la direction dans laquelle la pente sera la plus grande.

II.5. OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES.

Proposition 8. Soit f et g deux fonctions de U dans F . Soit α et β deux réels. et $a \in U$.

Si f et g sont différentiables en a , alors l’application $\alpha f + \beta g$ est différentiable en a et :

$$d(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha df(a) + \beta dg(a).$$

△ Ainsi, l’ensemble $\mathcal{D}_a(U, F)$ des applications de U dans F différentiables en a est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(U, F)$ et l’application $f \mapsto df(a)$ est une application linéaire de $\mathcal{D}_a(U, F)$ dans $\mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration.

□

Proposition 9. Soit f une fonction de U dans F et L une application linéaire de F dans G .
Si f est différentiable en a alors, l'application $L \circ f$ est différentiable en a et :

$$d(L \circ f)(a) = L \circ (df(a)).$$

Démonstration.

□

Proposition 10. Soit $f : U \rightarrow F$ et $g : U \rightarrow G$. Soit B une application bilinéaire de $F \times G$ dans H .
Si f et g sont différentiables en a alors, l'application $B(f, g)$ définie sur U par $B(f, g)(x) = B(f(x), g(x))$ est différentiable en a et :

$$\forall h \in E, d(B(f, g))(a) \cdot h =$$

Démonstration.

□

Remarque 10. Dans la cas de la variable réelle, on retrouve :

Cette proposition se généralise aux applications multilinéaires :

Proposition 11. Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, soit f_i une application de U dans F_i . Soit M une application multilinéaire de $F_1 \times \cdots \times F_p$ dans H .

Si toutes les f_i sont différentiables en a alors, l'application g définie sur U par :

$$g : x \mapsto M(f_1(x), \dots, f_p(x))$$

est différentiable en a et :

$$\forall h \in E, dg(a) \cdot h =$$

Proposition 12. Différentielle d'une composée.

Soit U un ouvert de E et V un ouvert de F . Soit $f : U \rightarrow F$ et $g : V \rightarrow G$ telles que $f(U) \subset V$.

Si f est différentiable en a et si g est différentiable en $b = f(a)$ alors, la fonction $g \circ f$ est différentiable en a et :

$$d(g \circ f)(a) =$$

Démonstration.

□

Corollaire 2. Cas particulier des fonctions à valeurs réelles.

Si f et g sont différentiables en a alors, la fonction fg est différentiable en a et :

$$\forall h \in E, d(fg)(a) \cdot h =$$

Si de plus $f(a) \neq 0$ alors, la fonction $\frac{1}{f}$ est différentiable en a et :

$$\forall h \in E, d\left(\frac{1}{f}\right)(a) \cdot h =$$

Démonstration.

□

Corollaire 3. Les applications polynomiales sur E sont différentiables en tout point a de E .

Les applications rationnelles, i.e. les applications de la forme $\frac{f}{g}$ où f et g sont deux applications polynomiales, sont différentiables en tout point a de E tel que $g(a) \neq 0$.

Exercice 11. Étudier la différentiabilité de l'application définie sur $GL_n(\mathbb{R})$ par $M \mapsto M^{-1}$.

Application au calcul des dérivées partielles.

On conserve les notations et les hypothèses de la proposition 12.

Soit U un ouvert de E et V un ouvert de F . Soit $f : U \rightarrow F$ et $g : V \rightarrow G$ telles que $f(U) \subset V$.

On suppose f différentiable en a et si g différentiable en $b = f(a)$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Notons $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ les dérivées partielles de f dans la base \mathcal{B} .

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base de F . Notons $\frac{\partial g}{\partial y_i}(b)$ les dérivées partielles de g dans la base \mathcal{B}' .

Notons (f_1, \dots, f_n) les fonctions coordonnées de f dans la base \mathcal{B}' .

Proposition 13. Règle de la chaîne.

Si f est différentiable en a et si g est différentiable en $b = f(a)$ alors :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) =$$

Démonstration.

□

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en tout point. Calculer les dérivées partielles de la fonction $g : (x, y) \mapsto f(x + y, xy)$ en fonction de celles de f .

Corollaire 4. Avec les notations précédentes, et si $E = \mathbb{R}^p, F = \mathbb{R}^n$ et $G = \mathbb{R}^q$ on a :

$$J_a(g \circ f) = J_b(g)J_a(f).$$

Corollaire 5. Dérivée le long d'un arc.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $\gamma : I \rightarrow E$. Soit $f : U \rightarrow F$ telle que $\gamma(I) \subset U$.

Soit $t \in I$. Si γ est dérivable en t et si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et :

$$(f \circ \gamma)'(t) =$$

Démonstration.

□

Si $\gamma(t) = x + th$ alors $(f \circ \gamma)'(t) =$