

– Chapitre 24 : Calcul différentiel et optimisation (2) –

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert non vide U d'un \mathbb{R} -espace vectoriel normé E de dimension finie et à valeurs dans un \mathbb{R} -espace vectoriel normé F de dimension finie.

I. FONCTIONS DE CLASSES \mathcal{C}^1 .

I.1. GÉNÉRALITÉS.

Définition 1. On dit que f est différentiable sur U si f est différentiable en tout point de U . Dans ce cas, l'application :

$$df : \quad \rightarrow \\ \quad \quad \quad \mapsto$$

est appelée la *différentielle* de f sur U .

Définition 2. La fonction f est dite de classe \mathcal{C}^1 sur U si f est différentiable sur U et si l'application df est continue sur U .

Notations. On note $\mathcal{C}^1(U, F)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur U et à valeurs dans F .

Exemple 1. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur E .

En effet,

I.2. OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES SUR LES APPLICATIONS DE CLASSE \mathcal{C}^1 .

Proposition 1. Soit f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 de U dans F . Soit α et β deux réels. Alors l'application $\alpha f + \beta g$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Démonstration.

□

Proposition 2. Soit f une fonction de de classe \mathcal{C}^1 de U dans F et L une application linéaire de F dans G . Alors, $L \circ f$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Démonstration.

□

Proposition 3. Soit $f : U \rightarrow F$ et $g : U \rightarrow G$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 . Soit B une application bilinéaire de $F \times G$ dans H . Alors, l'application $B(f, g)$ définie sur U par :

$$B(f, g) : x \mapsto B(f(x), g(x))$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Cette proposition se généralise aux applications multilinéaires.

Proposition 4. Soit U un ouvert de E et V un ouvert de F .

Soit $f : U \rightarrow F$ et $g : V \rightarrow G$ telles que $f(U) \subset V$.

Si f et g sont de classe \mathcal{C}^1 respectivement sur U et V , alors $g \circ f$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Proposition 5. Les applications polynomiales sur E sont de classe \mathcal{C}^1 sur E .

Les applications rationnelles, i.e. les applications de la forme $\frac{f}{g}$ où f et g sont deux applications polynomiales, sont de classe \mathcal{C}^1 sur tout ouvert où g ne s'annule pas.

Exercice 1. Montrer que l'application $f : (x, y) \mapsto \sin(x) \ln(x^2 + y^2 + 1)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

I.3. CARACTÉRISATIONS DES APPLICATIONS DE CLASSE \mathcal{C}^1 .

Théorème 1. Soit $f : U \rightarrow F$, où U est un ouvert de E . Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. L'application f est de classe \mathcal{C}^1 sur U .
2. Pour tout $h \in E$, f admet une dérivée selon le vecteur h en tout point de U , et l'application $a \mapsto D_h f(a)$ est continue sur U .
3. Toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent en tout point de U et sont toutes continues sur U .

Démonstration.

Nous allons montrer les application $(1) \Rightarrow (2)$ et $(2) \Rightarrow (3)$. L'application $(3) \Rightarrow (1)$ sera admise.

□

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^3}{x^2 + y^4} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est différentiable sur \mathbb{R}^2 , mais n'est pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

On a déjà vu que f est différentiable en $(0, 0)$.

Proposition 6. Soit f une application de classe \mathcal{C}^1 de U dans F . Pour tout arc $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ de classe \mathcal{C}^1 , si $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, on a :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Démonstration.

□

Remarque importante. Soit f est une application de classe \mathcal{C}^1 de U dans F .
Soit $a \in U$ et $h \in E$ tel que $[a, a+h] \subset U$. En posant $\gamma(t) = a + th$ pour tout $t \in [0, 1]$ on a :

Théorème 2. Caractérisation des fonctions constantes.

Soit U un ouvert connexe par arcs de E . Une fonction f de U dans F est constante si, et seulement si, f est différentiable sur U et $df(a) = 0$ pour tout $a \in U$.

⚠ Les parties connexes par arcs de \mathbb{R} étant les intervalles, on retrouve la caractérisation bien connue.

Démonstration. Conformément au programme nous démontrerons cette caractérisation dans le cas particulier où U est supposé convexe.

□

II. VECTEURS TANGENTS À UNE PARTIE D'UN ESPACE NORMÉ DE DIMENSION FINIE.

II.1. NOTION DE VECTEUR TANGENT.

Le but de cette partie est de généraliser la notion de tangente en un point.

Définition 3. Soit X une partie de E et $x \in X$. Un vecteur v de E est un *vecteur tangent* à X en x s'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow E$ à valeurs dans X , dérivable en 0, tel que :

$$\gamma(0) = x \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = v.$$

Autrement-dit, les vecteurs tangents à X en x sont les dérivées en 0 des arcs tracés sur X , définis au voisinage de 0, passant par x en 0 et dérivables en 0.

Notation. L'ensemble des vecteurs tangents à X en x se note $T_x X$.

Exemple 2. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle ouvert I . Notons \mathcal{C} la courbe d'équation $y = f(x)$. Soit $x \in I$. On considère l'arc γ défini au voisinage de 0 par $\gamma(h) = (x+h, f(x+h))$. Cet arc est bien à valeurs dans \mathcal{C} .

⚠ Cet exemple montre que la notion de vecteur tangent à une partie définie ici, généralise bien la notion de tangente à une courbe vue au lycée.

Exemple 3. Le vecteur 0 est tangent à X en tout point de X .

Exercice 4. Montrer que si x est un point intérieur à X alors, $T_x X = E$.

△ On en déduit que pour tout ouvert U de E , $T_x U = E$ pour tout $x \in U$.

Remarque 2. L'ensemble $T_x X$ est une partie stable par homothétie.

II.2. EXEMPLES D'ESPACES TANGENTS.

II.2.a. VECTEURS TANGENTS À UN SOUS-ESPACE AFFINE.

Soit $a \in E$ et F un sous-espace vectoriel de E . On pose $\mathcal{F} = a + F$ sous-espace affine passant par a et dirigé par F .

Soit $x \in \mathcal{F}$. Montrons que $T_x \mathcal{F} = F$.

II.2.b. VECTEURS TANGENTS À UNE SPHÈRE.

Soit E un espace euclidien et \mathcal{S} la sphère de E centrée en 0 et de rayon $r > 0$.

Soit $a \in \mathcal{S}$. Montrons que $T_a\mathcal{S}$ est l'hyperplan orthogonal au vecteur a .

II.2.c. VECTEURS TANGENTS AU GRAPHE D'UNE FONCTION DÉFINIE SUR UN OUVERT DE \mathbb{R}^2 .

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique. Notons \mathcal{G} son graphe :

$$\mathcal{G} = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U\}.$$

II.3. CAS DES ENSEMBLES DÉFINIS PAR UNE ÉQUATION.

Soit $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe \mathcal{C}^1 et :

$$X = \{x \in U \mid g(x) = 0\}.$$

Soit $a \in X$.

Théorème 3. Soit $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe \mathcal{C}^1 et :

$$X = \{x \in U \mid g(x) = 0\}.$$

Si $a \in X$ et $dg(a) \neq 0$, alors $T_a X = \text{Ker } dg(a)$.

Démonstration. On a prouvé $T_a X \subset \text{Ker } dg(a)$. Conformément au programme, l'inclusion inverse est admise. \square

Exemple 4. Reprenons l'exemple de la sphère \mathcal{S} de centre 0 et de rayon $r > 0$ dans un espace vectoriel euclidien E (voir page 7). La sphère \mathcal{S} est définie par l'équation $g(x) = 0$ avec :

Exemple 5. Reprenons l'exemple du plan tangent au graphe \mathcal{G} d'une fonction f définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 (voir page 7). Le graphe \mathcal{G} est défini par l'équation $g(x, y, z) = 0$ avec :

Dans le cas où E est euclidien, le théorème précédent se reformule ainsi :

Théorème 4. Seconde interprétation du gradient.

Soit $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe \mathcal{C}^1 et : $X = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$.

Si $a \in X$ et $\nabla g(a) \neq 0$, on a $T_a X = \nabla g(a)^\perp$.

Définition 4. Soit g une fonction définie sur un ouvert U de E et soit λ un réel. On appelle *ligne de niveau* λ , la partie de U définie par :

$$\Gamma_\lambda = g^{-1}(\{\lambda\}) = \{x \in U \mid g(x) = \lambda\}.$$

Remarque importante. Il est clair que le théorème précédent s'applique en particulier à :

$$X = g^{-1}(\{\lambda\}) \quad \text{i.e. avec } X \text{ la ligne de niveau } \lambda.$$

On obtient qu'en tout point $a \in \Gamma_\lambda$ où $\nabla g(a) \neq 0$ on a : $T_a \Gamma_\lambda = \nabla g(a)^\perp$.

En particulier, $\nabla g(a)$ est orthogonal à la ligne de niveau.

Remarque 4. En *topographie*, pour représenter le relief d'une montagne sur une carte plane on peut tracer les lignes de niveau, correspondant aux lieux où l'altitude est égale à une constante donnée. En notant f la fonction qui à tout point de coordonnées (x, y) associe son altitude $z = f(x, y)$, on obtient que le gradient de f est donc orthogonal à la ligne de niveau passant par ce point.

Équation cartésienne du plan (affine) tangent.

On munit \mathbb{R}^3 de sa structure euclidienne canonique. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^3 et $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe \mathcal{C}^1 . On considère : $X = \{(x, y, z) \in U \mid g(x, y, z) = 0\}$.

Exemple 6. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe \mathcal{C}^1 . On considère : $X = \{(x, y) \in U \mid z = f(x, y)\}$.

Exemple 7. Plan tangent à la sphère unité.

On considère la sphère unité de \mathbb{R}^3 , notée \mathcal{S} , dont une équation cartésienne est : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

III. OPTIMISATION : ÉTUDE AU PREMIER ORDRE.

Dans cette partie, les fonctions seront définies sur une partie A de E (non nécessairement ouverte) et à valeurs dans \mathbb{R} .

III.1. NOTION D'EXTREMUM LOCAL.

On ne revient pas sur les définitions, de maximum global, minimum global et extremum global.

Définition 5. Soit A une partie non vide de E et $a \in A$. On dit qu'une application $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ admet :

- un *maximum local* en a s'il existe un voisinage V de a tel que :

$$\forall x \in V \cap A, f(x) \leq f(a),$$

- un *minimum local* en a s'il existe un voisinage V de a tel que :

$$\forall x \in V \cap A, f(x) \geq f(a),$$

- un *extremum local* en a si elle admet un maximum ou un minimum local en a .

En cas d'inégalité stricte pour $x \in V \cap A \setminus \{a\}$, on parle alors de *maximum local strict*, de *minimum local strict* et d'*extremum local strict*.

Remarque 5. Si f admet un extremum (global) en a , alors elle admet un extremum local en a . Ainsi, lorsque l'on cherche les extrema globaux, on commence en général par chercher les extrema locaux.

III.2. CONDITION NÉCESSAIRE D'EXISTENCE D'UN EXTREMUM LOCAL.

Proposition 7. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local.

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point intérieur à A . Si f admet un extremum local en a , et si f est différentiable en a , alors $df(a) = 0$.

Démonstration.

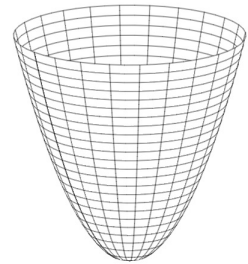
□

Définition 6. Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in A$. On dit que a est un *point critique* de f , si a est un point intérieur à A , que la fonction f est différentiable en a et que $df(a) = 0$.

△ Dans le cas où E est un espace euclidien, la condition $df(a) = 0$ équivaut à $\nabla f(a) = 0$.

Exercice 5. Étudier les extrema de la fonction numérique définie sur \mathbb{R}^2 par :

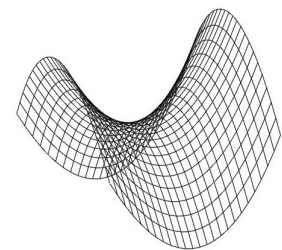
$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y.$$



Minimum global

△ Les extrema locaux sont donc à rechercher parmi les points critiques. Cependant, la réciproque est fautive ! Tout point critique ne correspond pas nécessairement à un extremum local.

Exercice 6. Étudier les extrema de la fonction numérique définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 - y^2$.



Point selle ou point col

Méthode. Comme le montre l'exemple ci-dessus, pour montrer que f n'admet pas d'extremum local en a on pourra exhiber un vecteur u pour lequel la fonction $t \mapsto f(a + tu)$ n'admette pas de minimum local en 0, et un autre vecteur v pour lequel la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ n'admette pas de maximum local en 0.

△ Il se peut cependant, qu'une fonction admette en un point un minimum local dans toutes les direc-

tions, i.e. que la fonction $t \mapsto f(a + tu)$ admette un minimum local en 0 pour tout vecteur h , sans pour autant que f admette de minimum local en ce point. Voir l'exercice qui suit :

Exercice 7. Soit la fonction numérique définie sur \mathbb{R}^2 par : $f(x, y) = y^2(y^2 - x^4)$.

1. Tracer dans le plan, le lieu des points où f est nulle, où f est à valeurs strictement positives, et celui où elle est à valeurs strictement négatives.
2. Montrer que pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ la fonction $\varphi : t \mapsto f(t(h, k))$ admet un minimum local en 0.
3. Montrer que la fonction f ne présente pas de minimum local en 0.

⚠ Une fonction n'admet pas nécessairement d'extremum en un point critique. En effet, elle pourrait admettre un extremum en un point qui n'est pas intérieur à A ou en un point où elle n'est pas différentiable. Donner un exemple, illustrant ces deux situations.

Méthode. Les extrema locaux de f sont donc à chercher parmi :

- les points critiques de f ,
- les points intérieurs à A mais où f n'est pas différentiable,
- les points de $A \setminus \overset{\circ}{A}$.

III.3. UTILISATION DE LA COMPACTITÉ.

Lorsque l'on cherche les extrema d'une fonction continue sur un compact non vide, les raisonnements sont souvent facilités par le fait que l'on soit certain, par théorème, de l'existence d'un maximum et d'un minimum de f sur ce compact.

III.4. OPTIMISATION SOUS CONTRAINTE.

Dans cette partie, on considère un ouvert U de E , f une fonction de classe \mathcal{C}^1 de U dans \mathbb{R} et X une partie de U . On va s'intéresser non pas à chercher les extrema de f sur U , mais sur X .

On parle alors, d'optimisation sous contrainte. La contrainte, c'est d'être dans X .

L'étude des points critiques ne peut se faire qu'en un point intérieur à X . Lorsque X est d'intérieur vide, aucun des résultats précédents ne peut donc s'appliquer.

C'est le cas, par exemple, si l'on veut trouver les extrema d'une fonction f sur la sphère unité de \mathbb{R}^3 . On dit alors que l'on cherche à optimiser f sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Proposition 8. Si la restriction de f à X admet un extremum local en $a \in X$ et si f est différentiable en a , alors $df(a)$ s'annule en tout vecteur tangent à X en a , c'est-à-dire :

$$T_a X \subset \text{Ker } df(a).$$

Démonstration.

□

Théorème 5. Théorème d'optimisation sous contrainte.

Soit f et g deux fonctions numériques définies et de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U de E .

Soit X l'ensemble des zéros de g : $X = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$.

Soit $a \in X$. Si la restriction de f à X admet un extremum local en a , et si $dg(a) \neq 0$, alors $df(a)$ est colinéaire à $dg(a)$, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$df(a) = \lambda dg(a).$$

△ Le rapport λ est appelé le *multiplicateur de Lagrange*.

Démonstration.

□

Remarque 6. Si de plus E est euclidien, la conclusion du théorème peut se reformuler en disant que si $\nabla g(a) \neq 0$, il existe il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$.

Exercice 8. Soit f l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par $f : (x, y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2$.
Déterminer les extrema de f sur $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 13\}$.

IV. APPLICATIONS DE CLASSE \mathcal{C}^k .

IV.1. DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE k .

Dans cette partie, $E = \mathbb{R}^p$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est la base canonique.

Les dérivées partielles d'une fonction $f : U \rightarrow F$, lorsqu'elles existent en tout point de l'ouvert U , sont elles-mêmes des applications de U dans F . On peut donc s'intéresser, si elles existent, à leurs dérivées partielles éventuelles. Pour $(j_1, \dots, j_k) \in \llbracket 1, p \rrbracket^k$, on notera :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}}$$

la dérivée partielle selon les indices j_1 , puis $j_2 \dots$, puis j_k . On appelle *dérivée partielle d'ordre k* , une dérivée partielle par rapport à une liste d'indices de longueur k .

Définition 7. Soit $k \geq 2$ un entier. L'application f est dite de classe \mathcal{C}^k sur U lorsque toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur U .

Notations. On note $\mathcal{C}^k(U, F)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^k sur U et à valeurs dans F .

\triangle Pour $k = 1$, cette définition correspond à la caractérisation des fonctions de classes \mathcal{C}^1 vue page 2. Par convention, une fonction est dite de classe \mathcal{C}^0 sur U , si elle est continue sur U .

Proposition 9. Soit une fonction $f : U \rightarrow F$.

- Si f est de classe \mathcal{C}^k sur U , alors f est de classe \mathcal{C}^i pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.
- Pour tout $k \geq 1$, f est de classe \mathcal{C}^k sur U si, et seulement si, toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont de classe \mathcal{C}^{k-1} .

Définition 8. Une application $f : U \rightarrow F$ est dite de classe \mathcal{C}^∞ sur U si elle est de classe \mathcal{C}^k sur U pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Notations. On note $\mathcal{C}^\infty(U, F)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur U et à valeurs dans F .

Exemple 8. Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, F)$, alors f est de classe \mathcal{C}^∞ .

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On obtient facilement les résultats suivants.

Proposition 10. Soit f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^k de U dans F . Soit α et β deux réels. Alors l'application $\alpha f + \beta g$ est de classe \mathcal{C}^k sur U .

Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{C}^k(U, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(U, F)$.

Proposition 11. Soit f une fonction de de classe \mathcal{C}^k de U dans F et L une application linéaire de F dans G . Alors, $L \circ f$ est de classe \mathcal{C}^k sur U .

Proposition 12. Soit $f : U \rightarrow F$ et $g : U \rightarrow G$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^k . Soit B une application bilinéaire de $F \times G$ dans H .

Alors, l'application $B(f, g)$ définie sur U par : $B(f, g) : x \mapsto B(f(x), g(x))$ est de classe \mathcal{C}^k sur U .

Cette proposition se généralise aux applications multilinéaires.

Exemple 9. Soit f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^k de U dans F . Si F est un espace euclidien alors, l'application $x \mapsto \langle f(x), g(x) \rangle$ est de classe \mathcal{C}^k sur U .

En particulier, l'application $\|f\|^2$ est de classe \mathcal{C}^k sur U .

Proposition 13. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^p et V un ouvert de \mathbb{R}^n .

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : V \rightarrow G$ telles que $f(U) \subset V$.

Si f et g sont de classe \mathcal{C}^k respectivement sur U et V , alors $g \circ f$ est de classe \mathcal{C}^k sur U .

Proposition 14. Les applications polynomiales sur \mathbb{R}^p sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^p .

Les applications rationnelles, i.e. les applications de la forme $\frac{f}{g}$ où f et g sont deux applications polynomiales, sont de classe \mathcal{C}^∞ sur tout ouvert où g ne s'annule pas.

IV.2. LE THÉORÈME DE SCHWARZ.

Théorème 6. Théorème de Schwarz.

Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur U . On a alors :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Démonstration. Admis. □

⚠ Sans l'hypothèse \mathcal{C}^2 , les dérivées partielles « croisées » peuvent exister mais ne pas être égales.

Exercice 9. (Peano-1884). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer l'existence des dérivées partielles « croisées » en $(0, 0)$ et les calculer.

V. OPTIMISATION : ÉTUDE AU SECOND ORDRE.

V.1. MATRICE HESSIENNE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE.

Dans cette partie, $E = \mathbb{R}^p$ et il est muni de sa structure euclidienne canonique. Les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

Définition 9. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur U , et soit $a \in U$.

On appelle *matrice hessienne* de f en a , la matrice notée $H_f(a)$ et définie par :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq p}$$

D'après le théorème de Schwarz, la matrice hessienne de f en a est symétrique.

On remarque que la matrice hessienne de f en a est la jacobienne de ∇f en a :

$$H_f(a) = J_{\nabla f}(a).$$

Théorème 7. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur U , et soit $a \in U$. On a alors :

$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o(\|h\|^2),$$

ce qui s'écrit aussi :

$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(a) h, h \rangle + o(\|h\|^2).$$

Démonstration. Admis. □

V.2. CONDITION D'EXTREMUM (ORDRE 2).

La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 va nous permettre de pousser l'étude locale au voisinage d'un point critique a . Le signe de $f(a+h) - f(a)$ est localement donné par le signe de $\langle \nabla f(a), h \rangle = h^\top H_f(a) h$.

Dans cette partie $E = \mathbb{R}^p$. On considère un ouvert U de \mathbb{R}^p , f une fonction de classe \mathcal{C}^2 de U dans \mathbb{R} .

△ Si f est définie sur une partie A de \mathbb{R}^p , non ouverte, mais d'intérieur non vide, on pourra appliquer les résultats qui suivent sur $U = \overset{\circ}{A}$.

Soit $a \in U$. La matrice hessienne $H_f(a)$ étant symétrique, elle est diagonalisable.

Rappel. On dit qu'elle est *positive* (respectivement *définie positive*) si l'une des deux propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

1. Les valeurs propres de $H_f(a)$ sont positives (respectivement strictement positives),

2. $\forall x \in E, x^\top H_f(a) x \geq 0$ (respectivement $\forall x \in E \setminus \{0\}, x^\top H_f(a) x > 0$).

On dira dans la suite que la matrice $H_f(a)$ est négative (respectivement définie négative) si $-H_f(a)$ est positive (respectivement définie positive).

On rappelle aussi que l'on note $\mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, symétriques et positives et $\mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques et définies positives.

Proposition 15. Condition nécessaire d'extremum.

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert U de \mathbb{R}^p . Si f admet un extremum local en $a \in U$, alors a est point critique de f et la matrice hessienne $H_f(a)$ est :

- positive dans le cas d'un minimum,
- négative dans le cas d'un maximum.

Démonstration.

□

Proposition 16. Condition suffisante d'extremum.

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert U de \mathbb{R}^p .

- Si $a \in U$ est un point critique de f et si $H_f(a)$ est définie positive (ce qui équivaut à $\text{Sp } H_f(a) \subset \mathbb{R}_+^*$), alors f admet un minimum local strict en a .
- Si $a \in U$ est un point critique de f et si $H_f(a)$ est définie négative (ce qui équivaut à $\text{Sp } H_f(a) \subset \mathbb{R}_-^*$), alors f admet un maximum local strict en a .

⚠ Si $H_f(a)$ possède deux valeurs propres de signes distincts, alors f n'admet pas d'extremum local en a . C'est un point selle.

Démonstration.

□

Cas particulier $E = \mathbb{R}^2$.

Dans le cas $p = 2$, on dispose d'un critère simple pour déterminer si une matrice symétrique réelle est définie positive puisque son déterminant est le produit des deux valeurs propres et sa trace leur somme.

Corollaire 1. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 de U dans \mathbb{R} , dans le cas particulier où U est un ouvert de \mathbb{R}^2 . Soit $a \in U$ un point critique de f .

- Si $\det H_f(a) > 0$ et $\text{tr } H_f(a) > 0$, alors f admet un minimum local strict en a .
- Si $\det H_f(a) > 0$ et $\text{tr } H_f(a) < 0$, alors f admet un maximum local strict en a .
- Si $\det H_f(a) < 0$, alors f n'admet pas d'extremum local en a . C'est un point selle.
- Si $\det H_f(a) = 0$, on ne peut pas conclure.

Exercice 10. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$. Déterminer les extrema de f sur \mathbb{R}^2 .