– Programme de colle n° 20 : du 23 au 27/03 –

Les questions de cours et les exercices portent sur tout ce qui suit.

– Chapitre 22 : Équations différentielles linéaires –

I. Rappels de mpsi.

Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1.
Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2.
Exemple d'équations non normalisées : problème de raccord.

II. Équations différentielles linéaires vectorielles d'ordre 1.

II.1. Définitions.

$x' = a(t)(x) + b(t)$ d'inconnue x où $a : I \to \mathcal{L}(E)$ et $b : I \to E$ sont deux fonctions continues.
$X' = A(t)X + B(t)$ d'inconnue X où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ sont deux fonctions continues.

II.2. Problème de Cauchy.

Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy. ✎

II.3. Structure de sous-espace affine de l'ensemble des solutions.

II.4. Le théorème de Cauchy linéaire.

Théorème de Cauchy linéaire (admis) : Soit $a : I \to \mathcal{L}(E)$ et $b : I \to E$ deux fonctions continues.
Pour tout $(t_0, x_0) \in I \times E$, il existe une unique solution définie sur I au problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x' & = & a(t)(x) + b(t) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

Si deux solutions f_1 et f_2 de (E) sur I coïncident en un point t_0, alors elles sont confondues.
Soit $\mathcal{S}_0$ l'espace vectoriel des solution de l'équation homogène $x' = a(t)(x)$. Pour tout $t_0 \in I$, l'application :

$$\begin{array}{cccc} E_0 & : & \mathcal{S}_0 & \to & E \\ & & f & \mapsto & f(t_0) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier : $\dim \mathcal{S}_0 = \dim E$.

III. Équations différentielles scalaires linéaires d'ordre n.

On s'intéresse aux équations scalaires de la forme : $x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} = b(t)$

⚠ **Savoir représenter une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel.**

Théorème de Cauchy linéaire. Pour tout $t_0 \in I$ et $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, il existe une unique solution sur I au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} & = & b(t) \\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ x^{(k)}(t_0) & = & x_k \end{cases}$$

Pour tout $t_0 \in I$, l'application :

$$\begin{array}{rccc} E_0 & : & \mathcal{S}_0 & \to & \mathbb{K}^n \\ & & f & \mapsto & \big(f(t_0), f'(t_0), \dots, f^{(n-1)}(t_0)\big) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier : $\dim \mathcal{S}_0 = n$.

IV. Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2.

$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$ où a_0, a_1 et b sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. D'après les résultats de la partie précédente :

1. L'espace vectoriel $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E) est de dimension 2.

2. Pour toute solution particulière f_p de (E), on a :

$$\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_0 = \{f_p + f \mid f \in \mathcal{S}_0\}.$$

3. D'après, le théorème de Cauchy linéaire il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x & = & b(t) \\ x(t_0) & = & x_0 \\ x'(t_0) & = & x_1 \end{cases}$$

pour tout $(t_0, x_0, x_1) \in I \times \mathbb{K}^2$.

IV.1. Wronskien d'un couple de solutions.

Soit f_1 et f_2 deux solutions de l'équation homogène (E_0) et soit W leur wronskien. Sont équivalentes :

1. (f_1, f_2) est une base de $\mathcal{S}_0$,

2. $\forall t \in I,\ W(t) \neq 0$,

3. $\exists t \in I,\ W(t) \neq 0$.

IV.2. Méthode de variation des constantes.

Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'équation : $x'' + x = \tan(t)$. ✎

IV.3. Recherche de solutions développables en série entière.

IV.4. Méthode du wronskien.

On souhaite résoudre l'équation homogène : $x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0 \qquad (E_0)$.
On détermine alors le wronskien (à une constante multiplicative près) en résolvant l'équation d'ordre 1 : $x' + a_1(t)x = 0$.
À l'aide de la solution obtenue à l'exercice précédent, et de la méthode du wronskien, déterminer une base de solutions de (E_0) sur $]0, \pi[$: $tx'' + 2x' + tx = 0$. ✎

On admet que $f_1 : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est une solution de (E_0) qui ne s'annule pas sur $]0, \pi[$.
Soit f une solution de (E_0). On a alors :

$$\left(\frac{f}{f_1}\right)' = \frac{W}{f_1^2}.$$

Or W est solution de l'équation d'ordre 1 : $tx' + 2x = 0$.
On obtient l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $W(t) = \dfrac{\alpha}{t^2}$, d'où :

$$\left(\frac{f}{f_1}\right)' = \frac{\frac{\alpha}{t^2}}{\frac{\sin^2 t}{t^2}} = \frac{\alpha}{\sin^2 t}.$$

En primitivant, on obtient l'existence de $\beta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{f(t)}{f_1(t)} = -\alpha t + \beta = -\alpha \frac{\cos t}{\sin t} + \beta.$$

D'où : $f(t) = -\alpha \dfrac{\cos t}{t} + \beta \dfrac{\sin t}{t}$.
On a donc prouvé : $\mathcal{S}_0 \subset \text{Vect}\,\{f_1, f_2\}$ avec $f_1 : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ et $f_2 : t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}$.
Or, $\dim \mathcal{S}_0 = 2$. On en déduit que $\boxed{\mathcal{S}_0 = \text{Vect}\,\{f_1, f_2\} \text{ et que } (f_1, f_2) \text{ est une base de } \mathcal{S}_0}$.
⚠ Inutile de prouver la liberté de (f_1, f_2), c'est une conséquence.

V. EXPONENTIELLE D'UN ENDOMORPHISME, D'UNE MATRICE.

V.1. Généralités.

V.2. Exponentielle et réduction.

S'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$, alors : $\exp(A) = P \exp(B) P^{-1}$.
Exponentielle d'une matrice diagonale, d'une matrice trinagulaire.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors, le spectre de $\exp(A)$ est donné par :

$$\text{sp}\big(\exp(A)\big) = \big\{\mathrm{e}^\lambda \mid \lambda \in \text{sp}(A)\big\}. \quad ✎$$

Plus précisément, si les valeurs propres de A, comptées avec ordre de multiplicité (algébrique), sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors celles de $\exp(A)$ sont $\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_p}$.
⚠ La proposition précédente est fausse sur $\mathbb{R}$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'inclusion suivante reste vraie : $\big\{\mathrm{e}^\lambda \mid \lambda \in \text{sp}_{\mathbb{R}}(A)\big\} \subset \text{sp}_{\mathbb{R}}\big(\exp(A)\big)$, mais l'inclusion inverse n'est pas toujours vérifiée.

V.3. Régularité de l'exponentielle.

Les applications : $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ a & \mapsto & \exp(a) \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & \exp(A) \end{array}$ sont continues.

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. L'application :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{R} & \to & \mathcal{L}(E) \\ & & t & \mapsto & \exp(ta) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est donnée par : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = a \circ \exp(ta) = \exp(ta) \circ a$. ✎

V.4. Propriétés algébriques de l'exponentielle.

Si les deux matrices A et B commutent, alors : $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$.

VI. Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants.

VI.1. Généralités.

Résolution du problème de Cauchy. Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$, l'application :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & E \\ & & t & \mapsto & \exp\big((t-t_0)a\big)(x_0) \end{array}$$ ✎

est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy <u>homogène</u> à coefficients constants :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x' & = & a(x) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

VI.2. Résolution pratique de l'équation homogène quand A est diagonalisable.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une base de vecteurs propres de A, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres respectives. Les solutions de l'équation homogène $X' = AX$ sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{e}^{\lambda_i t} X_i \qquad \text{avec} \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n.$$ ✎

⚠ Savoir démontrer ce résultat avec et sans la notion d'exponentielle de matrice.

VI.3. Méthode de variation de la constante.