

– TD 22 : Équations différentielles linéaires –

**Exercice 1.** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle non normalisée :  $tx' - x = t^2$ .

**Exercice 2.** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle non normalisée :  $2t^2x'' - 5tx' + 5x = 0$ .

**Exercice 3.** On souhaite résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation homogène  $t^2x'' + tx' - x = 0$ .

1. Déterminer une solution évidente.

2. À l'aide de la méthode du wroskien, déterminer une base de l'ensemble des solutions.

**Exercice 4. Oscillations couplées de deux masses.**

Deux masses identiques sont reliées à deux points fixes et entre elles, par trois ressorts de même raideur. On admet que les abscisses  $x_1$  et  $x_2$  des deux masses, repérées par rapport à leur position d'équilibre respective, sont, en fonction du temps  $t$ , solutions du système différentiel :

$$\begin{cases} x_1''(t) = -2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2''(t) = x_1(t) - 2x_2(t). \end{cases}$$

1. Résoudre ces équations différentielles.

*Indication : on écrira le système sous forme matricielle, et on essaiera de réduire la matrice.*

2. En déduire les solutions avec les conditions initiales :  $x_1(0) = 0$ ,  $x_1'(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 1$ ,  $x_2'(0) = 0$ . Ces solutions sont-elles périodiques ?

**Exercice 5.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = -I_{2n}$ . Résoudre l'équation :  $X'(t) = AX(t)$ .

**Exercice 6.** Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = -x + 3y + e^t \\ y' = -2x + 4y \end{cases}$$

**Exercice 7.** Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = \cos(t)x + \sin(t)y \\ y' = -\sin(t)x + \cos(t)y \end{cases}$$

**Exercice 8.** Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = (t+3)x + 2y \\ y' = -4x + (t-3)y \end{cases}$$

**Exercice 9.** Soit  $A$  une matrice non inversible de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $t \mapsto X(t)$  une solution du système différentiel  $X' = AX$ . Montrer que les valeurs prises par la fonction  $t \mapsto X(t)$  sont incluses dans un hyperplan affine.

**Exercice 10.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice annulant un polynôme :  $A^2 + pA + qI_n$  avec  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ . Justifier que chaque solution de  $X' = AX$  prend ses valeurs dans un plan vectoriel.

**Exercice 11.** On étudie le système différentiel :

$$(S) \begin{cases} x' &= z - y \\ y' &= x - z \\ z' &= y - x \end{cases}$$

1. Ce système possède-t-il des solutions ?
2. Sans résoudre le système, montrer que pour tout réel  $t$ , le point  $M(t)$  de coordonnées  $(x(t), y(t), z(t))$  se situe à l'intersection d'un plan et d'une sphère.
3. Calculer  $A^3$  et exprimer sous forme matricielle la solution générale du système  $(S)$ .

**Exercice 12.** On considère l'équation différentielle :  $(1 - x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$ . Résoudre cette équation pour  $x \in ]-1, 1[$  en posant  $x = \sin t$ .

**Exercice 13.** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  :  $y'' - y = \cos^2(x)$ , avec les conditions initiales :  $y(0) = y'(0) = 0$ .

**Exercice 14.** On considère l'équation différentielle :  $4tx'' + 2x' - x = 0$   $(E)$ .

1. Déterminer une solution  $\varphi_1$  de  $(E)$  développable en série entière et vérifiant  $\varphi_1(0) = 1$ .
2. On se place dans cette question sur  $]0, +\infty[$ .
  - a. Exprimer  $\varphi_1$  à l'aide de la fonction ch.
  - b. À l'aide de la méthode du wronskien, résoudre  $(E)$  sur  $]0, +\infty[$ .
3. On se place dans cette question sur  $] - \infty, 0[$ .
  - a. Exprimer  $\varphi_1$  à l'aide de la fonction cos.
  - b. À l'aide de la méthode du wronskien, résoudre  $(E)$  sur  $] - \infty, 0[$ .
4. Résoudre  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  en étudiant le problème de raccord.

**Exercice 15.** On considère l'équation différentielle :  $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ , où  $a$  et  $b$  sont deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ . Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

- (i) il existe une base de solutions  $(f, g)$  avec  $f$  paire et  $g$  impaire,
- (ii)  $a$  est une fonction impaire, et  $b$  paire.

**Exercice 16.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Calculer l'exponentielle de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 17.** Montrer que pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , il existe un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\exp(A) = P(A)$ .

**Exercice 18.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

- (i) la matrice  $A$  est antisymétrique,
- (ii) chaque solution  $X$  du système différentiel  $X' = AX$  est de norme constante.

**Exercice 19.** Le but de ce problème est d'étudier l'équation différentielle :

$$y'' + e^{-x}y = 0 \quad (E).$$

Soit  $f$  une solution de  $(E)$  bornée sur  $\mathbb{R}_+$ .

1. Montrer que la dérivée  $f'$  admet une limite finie en  $+\infty$ .
2. Quelle est la valeur de sa limite ?
3. Soit  $g$  une autre solution de  $(E)$  bornée sur  $\mathbb{R}_+$ . En étudiant le wronskien de  $f$  et  $g$ , montrer qu'elles sont liées. Que peut-on en conclure ?