

– Programme de colle n° 21 : du 30/03 au 03/04 –

Les questions de cours et les exercices portent sur tout ce qui suit : chapitre 23 & 24.

⚠ Les définitions et les résultats de ce chapitre doivent être parfaitement maîtrisés. On veillera notamment à ce que les étudiants connaissent la nature des objets qu'ils manipulent (vecteurs, matrices, applications linéaires, scalaires).

– CHAPITRE 23 : CALCUL DIFFÉRENTIEL ET OPTIMISATION (1) –

I. DÉRIVÉE SELON UN VECTEUR, DÉRIVÉES PARTIELLES.

I.1. Dérivée selon un vecteur ou dérivée directionnelle.

On dit que f admet une dérivée au point a selon le vecteur h si la fonction $\varphi : t \mapsto f(a + th)$ est dérivable en 0. Dans ce cas, cette dérivée est appelée *dérivée de f au point a selon le vecteur h* , et notée $D_h f(a)$:

$$D_h f(a) = \varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}.$$

I.2. Dérivée partielle.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on appelle i -ème *dérivée partielle* de f en a dans la base \mathcal{B} , lorsqu'elle existe, la dérivée de f en a selon le vecteur e_i . On la note alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{e_i} f(a).$$

II. DIFFÉRENTIELLE D'UNE FONCTION EN UN POINT.

II.1. Notations o et O .

II.2. Différentielle en un point.

On dit que f est *différentiable* en a s'il existe une application linéaire u de E dans F telle que l'on ait :

$$f(a + h) \underset{0}{=} f(a) + u(h) + o(h).$$

Théorème 1. Si f différentiable en a , alors l'application linéaire u ci-dessus est unique. Elle est appelée la *différentielle* de f en a et notée $df(a)$.

De plus, f admet une dérivée au point a selon tout vecteur h et on a :

$$\begin{array}{ccc} df(a) & : & E \rightarrow F \\ & & h \mapsto D_h f(a) \end{array}$$


Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors f est différentiable en tout point $a \in E$ et : $\forall a \in E, df(a) = f$.

Cas particulier des fonctions de la variable réelle : f est différentiable en a si, et seulement si, f est dérivable en a . Dans ce cas, pour tout réel h : $df(a) \cdot h = hf'(a)$ et $f'(a) = df(a) \cdot 1$.


II.3. Matrice jacobienne.


II.4. Gradient d'une fonction numérique.

II.5. Opérations sur les fonctions différentiables.

Si f est différentiable en a et si L est linéaire alors, l'application $L \circ f$ est différentiable en a et :
 $d(L \circ f)(a) = L \circ (df(a))$. 

Différentielle d'une composée : $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$.


Étude de la différentiabilité de l'application définie sur $GL_n(\mathbb{R})$ par $M \mapsto M^{-1}$. 

 Savoir énoncer **la règle de la chaîne**.

– CHAPITRE 24 : CALCUL DIFFÉRENTIEL ET OPTIMISATION (2) –

I. FONCTIONS DE CLASSES \mathcal{C}^1 .**I.1.** Généralités.

Une fonction f est dite de classe \mathcal{C}^1 sur U si f est différentiable sur U et si l'application $df : a \mapsto df(a)$ est continue sur U .

 C'est une application définie sur U et à valeurs dans $\mathcal{L}(E, F)$.

I.2. Opérations algébriques sur les applications de classe \mathcal{C}^1 .**I.3.** Caractérisations des applications de classe \mathcal{C}^1 .

Théorème 2. Soit $f : U \rightarrow F$, où U est un ouvert de E . Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Les affirmations suivantes sont équivalentes :



1. L'application f est de classe \mathcal{C}^1 sur U .

2. Pour tout $h \in E$, f admet une dérivée selon le vecteur h en tout point de U , et l'application $a \mapsto D_h f(a)$ est continue sur U .

3. Toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent en tout point de U et sont toutes continues sur U .

Théorème 3. Caractérisation des fonctions constantes.

Soit U un ouvert connexe par arcs de E . Une fonction f de U dans F est constante si, et seulement si, f est différentiable sur U et $df(a) = 0$ pour tout $a \in U$.

 Savoir démontrer ce théorème dans le cas particulier où U un ouvert convexe. 

II. VECTEURS TANGENTS À UNE PARTIE D'UN ESPACE NORMÉ DE DIMENSION FINIE.**II.1.** Notion de vecteur tangent.

Soit X une partie de E et $x \in X$. Un vecteur v de E est un *vecteur tangent* à X en x s'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow E$ à valeurs dans X , dérivable en 0, tel que :

$$\gamma(0) = x \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = v.$$

Notation. L'ensemble des vecteurs tangents à X en x se note $T_x X$.

II.2. Exemples d'espaces tangents.


Soit $\mathcal{F} = a + F$ un sous-espace affine passant par a et dirigé par F . Pour tout $x \in \mathcal{F}$, $T_x \mathcal{F} = F$.

II.3. Cas des ensembles définis par une équation.

Théorème 4. Soit $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe \mathcal{C}^1 et :

$$X = \{x \in U \mid g(x) = 0\}.$$

Si $a \in X$ et $dg(a) \neq 0$, alors $T_a X = \text{Ker } dg(a)$.

Savoir prouver l'inclusion $T_a X \subset \text{Ker } dg(a)$. 

Théorème 5. Seconde interprétation du gradient.

Soit $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe \mathcal{C}^1 et : $X = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$.

Si $a \in X$ et $\nabla g(a) \neq 0$, on a $T_a X = \nabla g(a)^\perp$.

Notion de ligne de niveau.

III. OPTIMISATION : ÉTUDE AU PREMIER ORDRE.

III.1. Notion d'extremum local.

III.2. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local.

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point intérieur à A . Si f admet un extremum local en a , et si f est différentiable en a , alors $df(a) = 0$.

Méthode. Les extrema locaux de f sont donc à chercher parmi :

- les points critiques de f ,
- les points intérieurs à A mais où f n'est pas différentiable,
- les points de $A \setminus \overset{\circ}{A}$.


III.3. Utilisation de la compacité.

III.4. Optimisation sous contrainte.

Dans cette partie, on considère un ouvert U de E , f une fonction de classe \mathcal{C}^1 de U dans \mathbb{R} et X une partie de U . On va s'intéresser non pas à chercher les extrema de f sur U , mais sur X .

On parle alors, d'optimisation sous contrainte. La contrainte, c'est d'être dans X .

L'étude des points critiques ne peut se faire qu'en un point intérieur à X . Lorsque X est d'intérieur vide, aucun des résultats précédents ne peut donc s'appliquer.

Si la restriction de f à X admet un extremum local en $a \in X$ et si f est différentiable en a alors : $T_a X \subset \text{Ker } df(a)$. 

Théorème 6. Théorème d'optimisation sous contrainte.

Soit f et g deux fonctions numériques définies et de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U de E .

Soit X l'ensemble des zéros de g : $X = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$.

Soit $a \in X$. Si la restriction de f à X admet un extremum local en a , et si $dg(a) \neq 0$, alors $df(a)$ est colinéaire à $dg(a)$, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$df(a) = \lambda dg(a). \quad \text{img alt="pencil icon" data-bbox="568 741 588 753" style="float: right; margin-left: 10px;"/>$$

\triangleq Le rapport λ est appelé le *multiplicateur de Lagrange*.

IV. APPLICATIONS DE CLASSE \mathcal{C}^k .

IV.1. Dérivées partielles d'ordre k .

IV.2. Le théorème de Schwarz.

V. OPTIMISATION : ÉTUDE AU SECOND ORDRE.

V.1. Matrice hessienne d'une fonction numérique.

V.2. Condition d'extremum (ordre 2).

Condition nécessaire d'extremum.

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert U de \mathbb{R}^p . Si f admet un extremum local en $a \in U$, alors a est point critique de f et la matrice hessienne $H_f(a)$ est :

- positive dans le cas d'un minimum,
- négative dans le cas d'un maximum.

Condition suffisante d'extremum.

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert U de \mathbb{R}^p .

- Si $a \in U$ est un point critique de f et si $H_f(a)$ est définie positive (ce qui équivaut à $\text{Sp } H_f(a) \subset \mathbb{R}_+^*$), alors f admet un minimum local strict en a .
- Si $a \in U$ est un point critique de f et si $H_f(a)$ est définie négative (ce qui équivaut à $\text{Sp } H_f(a) \subset \mathbb{R}_-^*$), alors f admet un maximum local strict en a .