

– TD 23 : Calcul différentiel et optimisation –

Exercice 1. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et $f : E \rightarrow F$ une application différentiable vérifiant de plus :

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Montrer que f est linéaire. *Indication : on pourra prouver que $f = df(0)$.*

Exercice 2. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et soit f une bijection de U dans V , où U et V sont des ouverts respectivement de E et F . On suppose que f est différentiable en un point $a \in U$ et que f^{-1} est différentiable en $b = f(a)$. Montrer que E et F sont isomorphes.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/4}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en $(0, 0)$.
2. Admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$?

Exercice 5. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{\sin(xy)}{|x| + |y|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
2. La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 6. Déterminer le maximum de la fonction f définie sur le compact $K = [0, 1]^2$ donnée par :

$$f(x, y) = \frac{x + y}{(1 + x^2)(1 + y^2)}.$$

Exercice 7. Étudier les extrema sur \mathbb{R}^2 de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

Exercice 8. Inégalité arithmético-géométrique.

Soit $n \geq 2$ et $s > 0$. On pose :

$$A = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = s \right\}.$$

1. Déterminer le maximum de f sur A où f est définie sur \mathbb{R}^n par $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i$.
2. Retrouver l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 9. Équation aux dérivées partielles (EDP).

On cherche toutes les fonctions f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 solutions de l'EDP :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 3.$$

La méthode est de faire un changement de variables linéaire en posant $u = ax + by$ et $v = cx + dy$, ce qui signifie que l'on définit une fonction g par : $f(x, y) = g(ax + by, cx + dy)$.

1. Déterminer les constantes a, b, c et d telles que g soit solution d'une EDP plus simple à résoudre.
2. En déduire les solutions de l'équation initiale.

Exercice 10. Équation aux dérivées partielles (EDP).

Résoudre sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ l'EDP :

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

On pourra passer en coordonnées polaires i.e. définir une fonction g par : $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Exercice 11. Fonctions harmoniques.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ où U est un ouvert de \mathbb{R}^2 . On dit que f est *harmonique* si $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ et qu'elle vérifie :

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

1. Montrer que si f est harmonique et de classe \mathcal{C}^3 , alors les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$ sont également harmoniques.

On suppose désormais que $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et que f est radiale i.e. qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que : $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$.

2. Montrer que f est harmonique si, et seulement si, φ' est solution d'une équation différentielle $xy' + y = 0$.
3. En résolvant cette équation, déterminer f .

Exercice 12. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $X = [-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ en $(0, 0)$, puis en $(1, 0)$.

Exercice 13. Montrer que l'ensemble des vecteurs tangents au groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ en I_n est inclus dans l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques réelles.

Exercice 14. Fonctions convexes.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On rappelle que f est dite convexe sur \mathbb{R}^n si :

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^n)^2, \forall \theta \in [0, 1], f(\theta a + (1 - \theta)b) \leq \theta f(a) + (1 - \theta)f(b).$$

1. Montrer que f est convexe sur \mathbb{R}^n ssi pour tout $(u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$ la fonction $g : t \mapsto f(u + tv)$ est convexe sur \mathbb{R} .

2. On suppose f convexe sur \mathbb{R}^n . Montrer que tout point critique de f est un minimum global.

3. Montrer que f convexe sur \mathbb{R}^n si, et seulement si, :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle.$$

△ On remarquera que le résultat de la question 2 découle immédiatement de celui de la question 3.

4. On suppose désormais f strictement convexe sur \mathbb{R}^n i.e. que f vérifie l'assertion :

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^n)^2, \forall \theta \in]0, 1[, a \neq b \Rightarrow f(\theta a + (1 - \theta)b) < \theta f(a) + (1 - \theta)f(b).$$

a. Montrer que f admet un minimum local en au plus un point.

b. Montrer, sous l'hypothèse d'existence d'un minimum local, que $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On dit que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall t > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y).$$

1. On suppose que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y).$$

2. Prouver la réciproque.

Exercice 16. Soit l'application $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, avec U un ouvert non vide de \mathbb{C} .

Pour $z = x + iy$, avec x et y réels, on pose $f(z) = g(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$, avec $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ réels.

On dit que f est holomorphe en $z_0 \in U$ si $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe, cette limite étant alors notée $f'(z_0)$.

Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$.

1. Montrer que si f est holomorphe en z_0 , alors g est différentiable en (x_0, y_0) et que :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0).$$

2. Montrer que si f est dérivable en z_0 , alors :

$$f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0).$$

3. On suppose maintenant que f et f' sont holomorphes sur U . Montrer que :

$$\Delta(P) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta(Q) = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0.$$

4. Montrer la réciproque de la question 1.

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n .

Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ associée à cette base, et E^2 de la norme produit associée, notée $\|\cdot\|$.

Soit $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E .

1. Prouver que : $\exists C \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in E \times E, |B(x, y)| \leq C \|x\|_\infty \|y\|_\infty$.

2. Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

Exercice 18. On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto xy(1 - x - y)$ définie sur :

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x + y \leq 1\}.$$

Déterminer les maxima locaux de f sur l'intérieur de T .