

– Devoir d'été –

Cette feuille a été conçue dans le but d'orienter vos révisions pour préparer votre année de MP. Je vous demande de rédiger les solutions pour le mardi 1^{er} septembre.

Certains de ces exercices seront posés lors du premier DS de mathématiques.

Pour toute question, vous pouvez me contacter à l'adresse : nicolas.hubert1@ac-versailles.fr

Exercice 1. Soit (u_n) une suite de réels.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que $u_n \sim \frac{1}{n}$. Montrer que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$.
2. On suppose maintenant que (u_n) est décroissante et vérifie : $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$.
 - a. Montrer que (u_n) converge vers 0^+ .
 - b. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$.
2. En déduire un développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\sin x}.$$

Exercice 3. Un calcul de $\zeta(2)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, P_n(\cotan^2 t) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)}.$$

2. Expliciter les racines de P_n et calculer leur somme.

3. En observant que $\cotan^2 t \leq \frac{1}{t^2} \leq 1 + \cotan^2 t$ pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, déterminer la valeur de $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 4. En salle 435, la température ambiante est de 20°C. Le café du prof de maths met 2 min pour passer d'une température de 80°C à 60°C. Combien de temps doit-il encore attendre pour le boire à une température de 40°C ?

Exercice 5. Formule d'inversion de Pascal - Nombre de surjections.

1. Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$.

2. Pour n et p entiers naturels, on note $s_n(p)$ le nombre de surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, p \rrbracket$. Montrer que

$$p^n = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} s_n(k). \text{ En déduire la valeur de } s_n(p).$$

Rappel. Soit f une fonction bijective d'un intervalle I dans un intervalle J , et dérivable sur I . Soit $y \in J$ et soit $x = f^{-1}(y)$.

Alors f^{-1} est dérivable en y si et seulement si $f'(x) \neq 0$. Et dans ce cas, on a :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 1 - x \ln(x)$.

1. Déterminer le tableau de variations de f' .
2. Déterminer le tableau de variations complet (avec limites) de f .
3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle I à préciser.
4. Dresser le tableau de variations complet de f^{-1} , sans dériver, mais en justifiant.
5. Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1} et calculer $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$.

Rappel. Soit f une fonction de E dans F . Soit A une partie de E et B une partie de F . On définit :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \quad \text{et} \quad f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Autrement-dit : • Pour tout $y \in F$: $y \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x \in A, y = f(x))$.

• Pour tout $x \in E$: $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

⚠ Ici l'écriture f^{-1} ne désigne pas la fonction réciproque et ne sous-entend pas que f est bijective.

Exercice 7. Soit f une fonction de E dans F .

1. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que f est injective si, et seulement si, : $\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$.
3. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$. Donner l'exemple d'une partie A de $\mathbb{R}$ telle que $A \neq f^{-1}(f(A))$.
- ⚠ Pour prouver que $A \neq f^{-1}(f(A))$ on donnera la valeur de $f(A)$ et de $f^{-1}(f(A))$.

Exercice 8. On cherche un trésor et on découvre une pièce contenant n coffres identiques. On note p la probabilité pour que l'ensemble de ces n coffres contienne le trésor. On a déjà ouvert $n - 1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il se trouve dans le dernier coffre ?

Exercice 9.

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués). Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

2. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 10. Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme à coefficients entiers.

1. On suppose que P admet une racine rationnelle que l'on écrit $r = \frac{p}{q}$ où p et q sont eux entiers premiers entre-eux. Montrer que $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.
2. Soit $P = 2X^3 - X^2 - 4X + 2$. Déterminer une racine rationnelle de P , puis en déduire sa factorisation en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
3. Le polynôme $P = X^3 + 5X + 2$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?

Exercice 11.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul et soit $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P d'ordre de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que α est une racine de P' d'ordre $m - 1$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé tel que $\deg P \geq 2$. Montrer que P' est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Le polynôme $P = X^5 + \frac{5}{2}X^4 + 10X^3 + \sqrt{2}X^2 - 3X + 7$ est-il scindé dans $\mathbb{R}[X]$? Justifier.

Exercice 12. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par : $u(P) = XP' - P$.

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, que l'on notera A .
On note $\mathcal{B}' = (1, 1 + X, 1 + X + X^2)$.
2. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$, que l'on notera B .
4. On considère le vecteur $P = X^2 + 2$. Déterminer les coordonnées de $u(x)$ dans la base $\mathcal{B}$ en utilisant la matrice A , puis ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ en utilisant la matrice B . Ces deux résultats sont-ils cohérents ?

Exercice 13. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(1) = 0\}$.

1. Montrer rigoureusement que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q'(1) \neq 0$. Montrer que $\text{Vect}\{Q\} \oplus F = \mathbb{R}[X]$.

Exercice 14. Noyaux et images itérés.

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie n .

On définit par récurrence la valeur des itérés de f : $f^0 = \text{Id}_E$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$ et plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{p+1} = f^p \circ f$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$K_p = \text{Ker } f^p \quad \text{et} \quad I_p = \text{Im } f^p.$$

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.
2. Montrer qu'il existe un entier naturel $r \leq n$ tel que $K_r = K_{r+1}$.
3. Montrer que $I_r = I_{r+1}$ et que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad K_r = K_{r+p} \quad \text{et} \quad I_r = I_{r+p}.$$

4. Montrer que : $E = K_r \oplus I_r$.

Exercice 15. Endomorphisme nilpotent.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$, et soit u un endomorphisme de E . On dit que u est *nilpotent* s'il existe un entier k tel que $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que u est nilpotent si, et seulement

si, $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Indication : on utilisera le résultat de l'exercice précédent.

De même, on dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *nilpotente* s'il existe un entier k tel que $M^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Le résultat de l'exercice précédent s'adapte au cas des matrices carrées : pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, M est nilpotente si, et seulement si, $M^n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Exercice 16. L'équation suivante, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, admet-elle des solutions ?

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix} \quad \text{où pour tout } 1 \leq k \leq n \text{ on a } S_k = \sum_{i=1}^k i.$$

Exercice 18. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

- Justifier rapidement que $\det A \in \mathbb{Z}$.
- Montrer que A est un élément inversible de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), +, \times)$ si, et seulement si, $\det A = \pm 1$.

Exercice 19. On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculer leur trace, leur déterminant et leur rang.
- Montrer que ces deux matrices sont équivalentes.
- Montrer que les matrices $A - I_3$ et $B - I_3$ ne sont pas semblables.
- En déduire que A et B ne sont pas semblables.

Exercice 20. Séries et transformation d'Abel.

- Soit deux suites (a_n) et (b_n) . On définit :

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Montrer que : $S_n = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k)$.

- Soit z un nombre complexe de module 1. En utilisant la décomposition ci-dessus étudier la convergence de la série de terme général $\frac{z^n}{n}$ en discutant selon les valeurs du nombre z .

Exercice 21. Intégrales de Wallis.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) \, dt$.

1. Calculer la valeur des intégrales I_0, I_1 et I_2 .

La question suivante ne sera pas utile pour la suite de l'exercice :

2. À l'aide d'un changement de variables, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) \, dt$.

3. À l'aide d'une intégration par parties, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. Pour ce faire, on pourra écrire $\cos^{n+2}(t) = \cos^{n+1}(t) \times \cos(t)$.

4. En déduire les valeurs de I_3 et I_4 .

5. Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$

6. Déduire de la question 3, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n \leq I_{n+1} \leq I_{n+2}$. En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.

8. En déduire que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.