

– Chapitre 1 : Analyse asymptotique –

I. COMPARAISON DE FONCTIONS.

Dans toute cette partie, f et g sont deux fonctions définies sur I , et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est un élément ou une borne de I .

I.1. FONCTIONS DOMINÉES.

Définition 1. On dit que la fonction f est *dominée* par la fonction g au voisinage de a s'il existe une fonction h définie et *bornée* au voisinage de a , telle que l'on ait, au voisinage de a :

$$f(x) = g(x) \cdot h(x).$$

Si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a , cela revient à dire que la fonction $\frac{f}{g}$ est *bornée* au voisinage de a .

On note $f \underset{a}{=} O(g)$ ou $f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$.

Remarque 1. Dire que f est dominée par g au voisinage de a , revient donc à dire qu'il existe une constante $M > 0$ telle qu'au voisinage de a , l'on ait : $|f(x)| \leq M|g(x)|$.

I.2. FONCTIONS NÉGLIGEABLES.

Définition 2. On dit que la fonction f est *négligeable* devant la fonction g au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que l'on ait $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ et, au voisinage de a :

$$f(x) = g(x) \cdot \varepsilon(x)$$

Si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a , cela revient à dire que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

On note $f \underset{a}{=} o(g)$.

Croissances comparées.

Les limites usuelles suivantes,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} =$$

se reformulent ainsi :

Exemple 1. Si f est dérivable en a , alors :

$$\boxed{f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + o(x - a)} \quad \text{et} \quad \boxed{f(a + h) = f(a) + hf'(a) + o(h)}.$$

Ces expressions sont appelées des développements limités à l'ordre 1.

Exemples de référence :

$(1+x)^\alpha$	$\underset{0}{=}$	e^x	$\underset{0}{=}$
$\frac{1}{1+x}$	$\underset{0}{=}$	$\cos x$	$\underset{0}{=}$
$\sqrt{1+x}$	$\underset{0}{=}$	$\sin x$	$\underset{0}{=}$
$\ln(1+x)$	$\underset{0}{=}$	$\tan x$	$\underset{0}{=}$

Remarque 2.

- $f = O(1)$ signifie
- $f = o(1)$ signifie

Proposition 1.

1. Si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$, alors : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha f_1 + \beta f_2 = o(g)$.

En particulier, $f_1 + f_2 = o(g)$ et $f_1 - f_2 = o(g)$.

2. Si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = O(g_2)$, alors :

$$f_1 \times f_2 = o(g_1 \times g_2).$$

3. Transitivité. Si $f_1 = o(f_2)$ et $f_2 = o(f_3)$, alors : $f_1 = o(f_3)$.

4. Si $f = o(g)$ et si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, alors : $\alpha f = o(g)$ et $f = o(\alpha g)$.

Démonstration.

□

I.3. FONCTIONS ÉQUIVALENTES.

Définition 3. On dit que la fonction f est *équivalente* à la fonction g au voisinage de a s'il existe une fonction h définie au voisinage de a telle que l'on ait $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1$ et, au voisinage de a :

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

Si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a , cela revient à dire que la fonction $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On note $f \underset{a}{\sim} g$.

Remarque 3. On comprend facilement que $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions définies sur I .

Remarque 4. Chacune des trois assertions $f \underset{a}{=} O(0)$, $f \underset{a}{=} o(0)$ et $f \underset{a}{\sim} 0$ signifie que la fonction f est

Le théorème suivant permet de bien comprendre ce que sont des fonctions équivalentes :

Théorème 1.

$$f \underset{a}{\sim} g \quad \Leftrightarrow \quad f - g \underset{a}{=} o(g) \quad \Leftrightarrow \quad f - g \underset{a}{=} o(f).$$

Démonstration.

□

Exemple 2. Soit f la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sum_{i=n}^m a_i x^i, \quad \text{avec } n \leq m, \quad a_n \neq 0 \text{ et } a_m \neq 0.$$

Alors : $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} a_n x^n}$, $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} a_m x^m}$ et $\boxed{f(x) \underset{-\infty}{\sim} a_m x^m}$.

Théorème 2. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors :

$$f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x - a).$$

Démonstration.

□

⚠ Ce théorème est faux si $f'(a) = 0$. Par exemple,

Exemple 3. Un équivalent de $x^3 - 1$ au voisinage de 1 est :

Ce que l'on pourrait aussi obtenir par factorisation :

Exemples de référence :

$$\begin{array}{ll} (1+x)^\alpha - 1 & \underset{0}{\sim} \\ \frac{1}{1+x} - 1 & \underset{0}{\sim} \\ \sqrt{1+x} - 1 & \underset{0}{\sim} \\ \ln(1+x) & \underset{0}{\sim} \end{array} \quad \begin{array}{ll} e^x - 1 & \underset{0}{\sim} \\ \cos x - 1 & \underset{0}{\sim} \\ \sin x & \underset{0}{\sim} \\ \tan x & \underset{0}{\sim} \end{array}$$

Le théorème suivant permet de bien comprendre l'utilité des fonctions équivalentes :

Théorème 3. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell.$$

Démonstration.

□

Exemple 4. $x^2 - x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ or $x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $x^2 - x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Remarque importante. La réciproque est partiellement vraie.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ et donc $f \underset{a}{\sim} g$.

C'est pour cette raison, que les équivalents en a ont peu d'intérêts lorsque les fonctions admettent en a une limite finie et non nulle.

⚠ • Si $\ell = 0$ le résultat est faux :

• Si $\ell = \pm\infty$ le résultat est faux :

Proposition 2. Supposons $f \underset{a}{\sim} g$.

1. Si g est positive au voisinage de a , alors f sera positive au voisinage de a .

2. Si g ne s'annule pas au voisinage de a , alors f ne s'annule pas au voisinage de a .

Démonstration. $f = g \times h$ avec $\lim_a h = 1 > 0$, donc h est strictement positive au voisinage de a . □

I.4. OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS ÉQUIVALENTES.

Proposition 3. Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors :

- $f_1 \cdot f_2 \underset{a}{\sim} g_1 \cdot g_2$.
- Si de plus, les fonctions ne s'annulent pas au voisinage de a : $\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$. En particulier : $\frac{1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g_2}$.

Démonstration. Comme $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ on a $f_1 = g_1 \cdot h_1$ et $f_2 = g_2 \cdot h_2$ avec $\lim_a h_1 = \lim_a h_2 = 1$.

- Donc $f_1 \cdot f_2 = (g_1 \cdot g_2) \cdot (h_1 \cdot h_2)$. Or, $\lim_a (h_1 \cdot h_2) = 1^2 = 1$ donc $f_1 \cdot f_2 \underset{a}{\sim} g_1 \cdot g_2$.

- Au voisinage de a : $\frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}$. Or, $\lim_a \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{1} = 1$, donc : $\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$. □

Proposition 4. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f et g sont strictement positives, alors pour tout réel α : $f(x)^\alpha \underset{a}{\sim} g(x)^\alpha$.
En particulier : $\sqrt[f]{f(x)} \underset{a}{\sim} \sqrt[g]{g(x)}$.

⚠ Cependant, l'équivalent des fonctions n'est pas compatible avec l'addition et la soustraction :

Remarque 6. Dans un calcul de limite, on peut donc remplacer une fonction par une fonction équivalente dans un produit, un quotient, des puissances, mais pas dans une somme ou une différence.

Théorème 4. (Substitution ou composition à droite).

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si u est une fonction à valeurs dans I , telle que $\lim_{x \rightarrow b} u(x) = a$, alors $f(u(x)) \underset{b}{\sim} g(u(x))$.

Démonstration.

□

Exemple 5.

Exemple 6.

⚠ Cependant, la composition à gauche n'est pas compatible avec l'équivalence des fonctions :

$$f \underset{a}{\sim} g \not\Rightarrow u \circ f \underset{a}{\sim} u \circ g$$

Contre-exemple :

Mais on a vu que la composition à gauche est vraie dans le cas particulier des fonctions puissances. On va voir que c'est aussi le cas avec la fonction $\ln$, sous certaines hypothèses :

Théorème 5. Soit f et g deux fonctions strictement positives telles que $f \underset{a}{\sim} g$.

Si $\lim_a f = \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ ou $\ell = +\infty$, alors : $\ln \circ f \underset{a}{\sim} \ln \circ g$.

Démonstration.

□

⚠ Ne pas oublier l'hypothèse $\ell \neq 1$. Par exemple, $x^2 + 1 \underset{0}{\sim} e^x$, mais $\ln(x^2 + 1) \not\underset{0}{\sim} \ln(e^x)$. En effet :

Exercice 1. Déterminer un équivalent de $\ln(x^2 + 1)$ au voisinage de $+\infty$.

I.5. COMPARAISON DES SUITES.

Les relations de comparaison des fonctions s'adaptent facilement au cas des suites.

Implicitement, les comparaisons ne se font qu'au voisinage de $+\infty$.

Comparaison des suites de référence.

Proposition 5. Pour tout $q \in]-1, 1[$, $q^n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ i.e. : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nq^n = 0$.

Plus généralement, pour tout $q \in]-1, 1[$, et $\alpha > 0$:

$$q^n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Démonstration.

□

Dans le théorème suivant, on notera la négligeabilité par $\ll$ au lieu de o .

Théorème 6. Soit $\alpha > 0, \beta > 0$ et $a > 1$.

$$\left((\ln n)^\beta \ll n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n \right) \quad \text{et} \quad \left(n^{-n} \ll \frac{1}{n!} \ll a^{-n} \ll n^{-\alpha} \ll (\ln n)^{-\beta} \right)$$

Théorème 7. Formule de Stirling.

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

II. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS.

Les fonctions seront définies sur un intervalle I , et a désigne un réel qui est élément ou borne de I .

II.1. NOTION DE DÉVELOPPEMENT LIMITÉ.

Définition 4. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a , s'il existe $n + 1$ réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que :

$$f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \underset{a}{=} \sum_{i=0}^n a_i(x-a)^i + o((x-a)^n),$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$f(a+h) \underset{0}{=} a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots + a_nh^n + o(h^n) \underset{0}{=} \sum_{i=0}^n a_ih^i + o(h^n).$$

Notation. L'expression « développement limité d'ordre n en a » sera notée $DL_n(a)$.

Exemples 7.

- La fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 1 + 2x - x^4 + x^5 \ln x$, admet un $DL_4(0)$:
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ admet un développement limité en 0 à tout ordre $n \in \mathbb{N}$:

Proposition 6. Si une fonction admet un DL_n au voisinage de a , alors ce développement est unique.

Démonstration. Soit deux uplets de réels $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ tels que :

$$f(a+h) \underset{0}{=} \sum_{i=0}^n a_i \cdot h^i + o(h^n) \underset{0}{=} \sum_{i=0}^n b_i \cdot h^i + o(h^n).$$

□

Remarque 7. Il est important de noter que lorsqu'on détermine un $DL_n(a)$, f n'est pas nécessairement définie en a .

Si f est définie en a , en posant $h = 0$, on obtient : $a_0 =$

Si f n'est pas définie en a , en faisant $h \rightarrow 0$, on obtient : $a_0 =$.

Définition 5. Si f admet un développement limité d'ordre n en a de la forme :

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x-a)^i + o((x-a)^n), \quad \text{ou} \quad f(a+h) = \sum_{i=0}^n a_i h^i + o(h^n),$$

alors $\sum_{i=0}^n a_i(x-a)^i$ et $\sum_{i=0}^n a_i h^i$ s'appellent la *partie régulière* du développement limité.

Remarque 8. D'après la définition d'un développement limité, un $DL_n(a)$ peut toujours se ramener à un $DL_n(0)$. Désormais, nous allons donc surtout nous intéresser à des développements limités en 0. Il n'est donc plus indispensables de noter $\underset{0}{=}$, ainsi nous noterons simplement $=$.

Proposition 7. Soit f une fonction admettant un $DL_n(0)$ de partie régulière $\sum_{i=0}^n a_i x^i$ alors, pour tout

$p \leq n$, f admet un $DL_p(0)$ de partie régulière $\sum_{i=0}^p a_i x^i$.

On parle alors de *troncature à l'ordre p* .

Démonstration.

□

Remarque importante.

Supposons que f admette en 0 un DL à l'ordre n : $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i + o(x^n)$.

Alors, on peut écrire :

Cette méthode nous permettra parfois de diminuer d'un cran l'ordre de nos DL (voir l'étude des séries).

Voici un corollaire de l'unicité des développements limités :

Proposition 8. Soit f une fonction admettant un $DL_n(0)$ de partie régulière $P(x)$.
Si f est une fonction paire (respectivement impaire) alors le polynôme P ne contient que des puissances paires (resp. impaires).

Démonstration.

□

II.2. CNS D'EXISTENCE DE DL À L'ORDRE 0 ET 1.

Proposition 9. Une fonction f admet un DL à l'ordre 0 en a si, et seulement si, elle admet une limite finie en a .

Dans ce cas, en notant $\ell = \lim_a f$, on a : $f(x) = \ell + o(1)$.

Ainsi, l'existence d'un DL à l'ordre 0 en a équivaut à :

- la continuité de f en a , dans le cas où $a \in I$,
- au fait que f soit prolongeable par continuité en a , dans le cas où $a \notin I$.

Démonstration.

□

Proposition 10. Supposons f définie en a .

Une fonction f admet un DL à l'ordre 1 en a si, et seulement si, elle est dérivable en a .

Dans ce cas, on a : $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + o(x - a)$.

Démonstration.

□

- ⚠ Malheureusement les CNS qu'on vient de voir aux ordres 0 et 1 ne se généralisent pas à l'ordre $n \geq 2$.
En effet, soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

II.3. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS.

Bien qu'on ait vu qu'à des ordres $n \geq 2$, il n'y ait pas de CNS reliant l'existence d'un DL à l'ordre n et la régularité de la fonction, nous avons cependant, une condition suffisante à l'existence d'un DL_n :

Théorème 8. Formule de Taylor-Young.

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I alors, f admet en tout point a de I un DL_n donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

- ⚠ Comme on a vu précédemment, cette condition suffisante n'est nullement nécessaire (voir contre-exemple précédent), et de plus elle ne s'applique que dans le cas où $a \in I$.

Ce théorème va nous permettre d'obtenir des $DL_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ des fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^\infty$:

$DL_n(0)$ des fonctions usuelles :

$(1+x)^\alpha$	$\underset{0}{=}$	1	+	αx	+	$\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2$	+	$\dots$	+	$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$	+	$o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$\underset{0}{=}$	1	+	x	+	x^2	+	$\dots$	+	x^n	+	$o(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$\underset{0}{=}$	1	-	x	+	x^2	+	$\dots$	+	$(-1)^n x^n$	+	$o(x^n)$
e^x	$\underset{0}{=}$	1	+	x	+	$\frac{x^2}{2!}$	+	$\dots$	+	$\frac{x^n}{n!}$	+	$o(x^n)$
$\cos(x)$	$\underset{0}{=}$	1	-	$\frac{x^2}{2!}$	+	$\frac{x^4}{4!}$	-	$\dots$	+	$(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	+	$o(x^{2n+1})$
$\sin(x)$	$\underset{0}{=}$	x	-	$\frac{x^3}{3!}$	+	$\frac{x^5}{5!}$	-	$\dots$	+	$(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	+	$o(x^{2n+2})$
$\text{ch}(x)$	$\underset{0}{=}$	1	+	$\frac{x^2}{2!}$	+	$\frac{x^4}{4!}$	+	$\dots$	+	$\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	+	$o(x^{2n+1})$
$\text{sh}(x)$	$\underset{0}{=}$	x	+	$\frac{x^3}{3!}$	+	$\frac{x^5}{5!}$	+	$\dots$	+	$\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	+	$o(x^{2n+2})$

II.4. OPÉRATIONS SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS.

La plupart du temps, pour calculer un DL, on n'utilise pas la formule de Taylor-Young, mais on utilise les DL usuels, ainsi que les opérations sur les DL ; d'autant que la formule de Taylor-Young n'est applicable que si f est de classe $\mathcal{C}^n$.

II.4.a. SOMME ET PRODUIT.

Proposition 11. Si f et g admettent des $DL_n(a)$ de la forme :

$$f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o((x-a)^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{a}{=} Q(x-a) + o((x-a)^n),$$

alors $f+g$ et $f \cdot g$ admettent des $DL_n(a)$ donnés par :

$$(f+g)(x) \underset{a}{=} (P+Q)(x-a) + o((x-a)^n) \quad \text{et} \quad (f \cdot g)(x) \underset{a}{=} S(x-a) + o((x-a)^n),$$

où S est le polynôme obtenu en ne gardant que les termes de degré $\leq n$ dans le produit $P \cdot Q$.

Exercice 2. Déterminer le $DL_3(0)$ des fonctions définies par :

$$f(x) = \sin x + \cos x \quad g(x) = e^x \cdot \sin x.$$

Remarque importante.

- Le $DL(0)$ de $\sin$ n'ayant pas de terme constant, on peut se contenter d'un $DL_2(0)$ de $\exp$.
- g étant de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$, la formule de Taylor-Young ainsi que l'unicité du $DL_3(0)$ donnent :

II.4.b. COMPOSITION.

Proposition 12. Si f et g admettent des $DL_n(0)$ de la forme :

$$f(x) \underset{0}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(y) \underset{0}{=} Q(y) + o(y^n).$$

Si $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0}$ (i.e. si i.e. si $a_0 = 0$), alors $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est obtenue en ne gardant que les termes de degré $\leq n$ dans la composée $Q \circ P$.

Exercice 3. Déterminer un $DL_3(0)$ de $f(x) = e^{\sin x}$.

Exercice 4. Déterminer un $DL_3(0)$ de $g(x) = e^{\cos x}$.

Exercice 5. Déterminer un $DL_4(0)$ de $h(x) = \sqrt{\operatorname{ch} x}$.

II.4.c. INVERSE ET QUOTIENT.

Méthode. Si f admet un $DL_n(0)$, et si $\lim_0 f = 0$, on obtient un $DL_n(0)$ de la fonction $\frac{1}{1+f}$ en composant la fonction f avec la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

Exercice 6. Déterminer un $DL_5(0)$ de la fonction $f = \frac{1}{\cos}$. En déduire un $DL_5(0)$ de la fonction $\tan$.

II.4.d. PRIMITIVATION D'UN DÉVELOPPEMENT LIMITÉ.

Proposition 13. Soit I un intervalle contenant a et f une fonction continue sur I possédant pour $\text{DL}_n(a)$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i (x-a)^i + o((x-a)^n).$$

Si F est une primitive de f sur I , alors elle admet $\text{DL}_{n+1}(a)$ donné par :

$$F(x) = F(a) + \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} (x-a)^{i+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

Exemple 8. Par primitivation de : $\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + o(x^{n-1})$, on obtient :

$$\ln(1+x) \underset{0}{=}$$

Exemple 9. Par primitivation de : $\frac{1}{1+x^2} \underset{0}{=}$, on obtient :

$$\arctan x \underset{0}{=}$$

Exemple 10. Déterminons un $\text{DL}_6(0)$ de $\tan$, par la méthode de primitivations successives.

⚠ Cependant, si f est dérivable et admet un $\text{DL}_n(a)$, alors f' n'admet pas nécessairement de $\text{DL}_{n-1}(a)$.
En effet, reprenons l'exemple de la page 10 :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Nous avons démontré que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle admet un $\text{DL}_2(0)$.
Pourtant, f' n'est pas dérivable en 0, donc n'admet pas de $\text{DL}_1(0)$.

On a cependant le corollaire suivant :

Corollaire 1. Soit $a \in I$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , si f admet un $\text{DL}_n(a)$, et si f' admet un $\text{DL}_{n-1}(a)$, alors la partie régulière du $\text{DL}_{n-1}(a)$ de f' est la dérivée de la partie régulière du $\text{DL}_n(a)$ de f .

Démonstration.

□

Exemple. Sur $I = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on définit f par $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Les fonctions f et f' étant $\mathcal{C}^\infty$ sur I elles admettent des DL à tout ordre. En particulier, f admet un $\text{DL}_6(0)$ et f' un $\text{DL}_5(0)$. La proposition précédente donne :

$$\frac{1}{(1-x)^2} =$$

III. APPLICATIONS.

III.1. RECHERCHE D'ÉQUIVALENTS. CALCUL DE LIMITES.

Proposition 14. Si f admet pour $\text{DL}_n(a)$:

$$f(x) = \sum_{i=p}^n a_i (x-a)^i + o((x-a)^n), \quad \text{avec } a_p \neq 0,$$

alors :

$$f(x) \underset{a}{\sim} a_p (x-a)^p.$$

Démonstration.

□

Exemple 11. Le $\text{DL}_2(0)$ de $\cos$ donne : $1 - \cos x \underset{0}{\sim}$

La proposition précédente peut s'adapter ainsi ($a_p \neq 0$ devient inutile) :

Proposition 15. Si f admet un $\text{DL}_p(a)$ et si $a_0 = \dots = a_{p-1} = 0$ alors :

$$f(x) = O \underset{a}{((x-a)^p)}.$$

Exercice 7. Effectuer les calculs de limites suivants :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{\sin x - x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x}.$

III.2. ÉTUDE DE L'ALLURE D'UNE COURBE AU VOISINAGE D'UN POINT.

Dans cette partie, on suppose que f est une fonction définie en a .

Si f admet pour $DL_1(a)$: $f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$.

On a déjà vu qu'alors f est dérivable en a et que : $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$. Ainsi, la courbe $\mathcal{C}$ de f en a admet en ce point une tangente d'équation $y = a_0 + a_1(x-a)$.

Un $DL_1(a)$ permet donc d'obtenir l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en a . Ce qui nous intéresse maintenant, c'est de connaître la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à la tangente, au moins au voisinage de a . Pour ce faire, on doit étudier la quantité : $f(x) - (a_0 + a_1(x-a))$. On voit alors que la connaissance d'un DL d'ordre supérieur peut être intéressant.

Méthode.

- Si f admet un $DL_2(a)$: $f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + o((x-a)^2)$, avec $a_2 \neq 0$,

alors : $f(x) - (a_0 + a_1(x-a)) \underset{a}{\sim} a_2(x-a)^2$.

Ce qui répond à la question de la position relative, étant donné que deux fonctions équivalentes en un point ont localement le même signe.

- Si $a_2 = 0$, alors nous devons pousser le DL jusqu'à obtenir un terme non nul. Ainsi, si f admet pour $DL_p(a)$:

$$f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p), \quad \text{avec } a_p \neq 0,$$

alors la position relative est donnée localement par le signe de $a_p(x-a)^p$.

Exemples 12.

- $\tan x \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, donc la courbe de la fonction $\tan$ admet pour tangente en 0 la droite d'équation $y = x$ et, au voisinage de 0 :
 - la courbe est au-dessus de la tangente pour $x > 0$.
 - la courbe est en dessous de la tangente pour $x < 0$.
- $e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc la courbe de la fonction $\exp$ admet pour tangente en 0 la droite d'équation $y = 1 + x$ et, au voisinage de 0, la courbe est au-dessus de la tangente.

En particulier, on en déduit :

Proposition 16. Soit f admettant un $DL_2(a)$:

$$f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + o((x-a)^2).$$

Si $a_1 = 0$ et $a_2 \neq 0$, alors f admet un extremum local en a . Plus précisément :

- si $a_1 = 0$ et $a_2 > 0$, alors f admet
- si $a_1 = 0$ et $a_2 < 0$, alors f admet

Démonstration. $f(x) - f(a) = f(x) - a_0 \underset{a}{\sim} a_2(x-a)^2$. □

Remarque 11. $a_1 = f'(a)$ et si de plus f est de classe $\mathcal{C}^2$, la formule de Taylor-Young donne $a_2 = \frac{f''(a)}{2}$.

IV. EXEMPLES DE DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES.**Exercice 8.** Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 4, au voisinage de 0, de :

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} x}.$$

Exercice 9. Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 3, au voisinage de $+\infty$, de :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1}.$$

