

– TD 1 : Calcul asymptotique –

Exercice 1. Calculer les limites suivantes, où $a > 0$ et $b > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\operatorname{sh} x - x \operatorname{ch} x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Exercice 3.

1. Montrer qu'il existe un polynôme réel P_n vérifiant $\sqrt{1+x} =_0 P_n(x) + O(x^n)$.
2. Montrer que X^n divise le polynôme $P_n^2 - X - 1$.

Exercice 4. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, en 0, de la fonction f définie par $f(x) = \ln(\cos x)$. En déduire le développement limité à l'ordre 4, en 0, de la fonction $\tan$.

Exercice 5. Déterminer le développement limité à l'ordre 2, en 0, de la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

Exercice 6. Déterminer un équivalent en 0 de $x^x - (\sin x)^x$.

Exercice 7. On admet qu'il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f' = f - \frac{f^2}{2} \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

Prouver que f admet un $\text{DL}_3(0)$ puis le déterminer.

Exercice 8. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + x^3$. ♥

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer un équivalent de f^{-1} au voisinage de 0, puis un développement asymptotique à 3 termes.

Exercice 9. Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 1, au voisinage de 0, de :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\cos x - 1}.$$

Exercice 10. Montrer que : $\sum_{k=1}^n k! \sim n!$

Exercice 11. Pour $n \geq 2$, on considère le polynôme : $P_n = X^n - nX + 1$. ♥

1. Montrer que P_n admet exactement une racine réelle dans $[0, 1]$. On la note x_n .
2. Étudier la convergence de la suite (x_n) , puis un équivalent simple de x_n .

Exercice 12. Soit n un entier naturel. ♡

1. Montrer que l'équation $x + e^x = n$ admet une unique solution notée x_n .
2. Étudier la convergence de la suite (x_n) , puis un équivalent simple de x_n .
3. Donner un développement asymptotique à trois termes de la suite (x_n) .

Exercice 13. Soit n un entier naturel non nul et soit le polynôme : $P_n = X(X-1)\dots(X-n)$.

1. Montrer que le polynôme P'_n possède une unique racine dans l'intervalle $]0, 1[$; celle-ci sera notée x_n .
2. Étudier la monotonie de la suite (x_n) .
3. Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle : $F = \frac{P'_n}{P_n}$.
4. En déduire un équivalent de la suite (x_n) .

Exercice 14.

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ a une unique solution x_n dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$.
2. Montrer que $x_n \sim n\pi$ puis que : $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$.
3. Chercher un équivalent de : $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$.
4. Conclure que : $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 15. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$.
2. En déduire un équivalent simple de u_n .

Exercice 16. Recherche d'un équivalent. ♡

On considère la suite définie par $u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n}$ et $u_0 > 0$.

1. Étudier la convergence de la suite (u_n) .
2. Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ converge vers une constante non nulle.
3. À l'aide du théorème de Cesàro, en déduire un équivalent de u_n .

Exercice 17. Développement asymptotique et asymptote. ♡

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

1. Déterminer un équivalent simple de f au voisinage de $+\infty$.
2. Déterminer un développement asymptotique à 3 termes en $+\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$ puis de $f(x)$.
3. En déduire l'existence d'une asymptote oblique dont on donnera une équation, ainsi que la position relative avec la courbe de f , au voisinage de $+\infty$.

Exercice 18.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln x = k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ notée x_k .
2. Prouver l'existence de constantes a, b et c à déterminer telles que : $x_k \underset{+\infty}{=} ak + b \ln k + c \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$.