

– Chapitre 2 : Séries numériques –

Dans tout ce chapitre, les suites considérées seront des suites numériques i.e. des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. GÉNÉRALITÉS.

Définition 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{0 \leq k \leq n} u_k.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Le terme u_n est appelé *terme général de la série*,
- Le terme S_n est appelé *somme partielle d'indice n de la série*.

On parle de *séries numériques* pour préciser que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{K}$.

On note $\sum u_n$ la série de terme général u_n .

On note ainsi, $\sum \frac{1}{2^n}$ la série de terme général $\frac{1}{2^n}$.

Remarque 1. Parfois, la suite ne sera définie qu'à partir du rang 1 : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Dans ce cas, $\sum u_n$ désignera la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} u_k.$$

Définition 2. On dit que la série de terme général u_n *converge* si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. La limite de la série est alors notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, et appelée *somme de la série*. On peut alors écrire : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. Dans le cas contraire, on dit que la série *diverge*.

Remarque importante. Le but de ce chapitre est de pouvoir déterminer la nature d'une série, et le cas échéant de déterminer sa somme (i.e. sa limite), simplement en s'intéressant à son terme général.

Proposition 1. Condition nécessaire de convergence.

Si la série de terme général u_n converge, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Démonstration.

□

Remarque 3. Par contraposée, si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge vers 0, alors la série de terme général u_n diverge. On dit dans ce cas que *la série diverge grossièrement*.

⚠ La réciproque de la proposition précédente est fausse. Autrement-dit, la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers 0 n'implique pas la convergence de la série de t.g. u_n , comme le prouve l'exemple suivant :

Exemple 1. La série harmonique.

La série harmonique est la série de t.g. $\frac{1}{n}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Remarque 4. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum_{k \geq n+1} u_k$ converge. En effet, pour tout entier N ,

$$\sum_{k=n+1}^N u_k =$$

Définition 3. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la somme de la série convergente $\sum_{k \geq n+1} u_k$ est notée R_n et appelée le *reste d'ordre n* de la série $\sum u_n$:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Remarque 5. Si la série $\sum u_n$ converge, en notant respectivement S_n et R_n la somme partielle et le reste d'ordre n , on a :

Proposition 2. Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$.

Démonstration.

□

Définition 4. On appelle *série télescopique* une série dont le terme général u_n , peut s'écrire :

$$u_n = v_{n+1} - v_n,$$

avec $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Proposition 3. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge si, et seulement si, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - v_0$.

Démonstration.

□

II. EXEMPLES DE RÉFÉRENCE.

II.1. SÉRIES GÉOMÉTRIQUES.

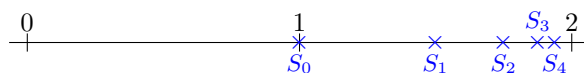
Proposition 4. Soit $q \in \mathbb{C}$. La série de t.g. q^n appelée *série géométrique* de raison q , converge si, et seulement si, $|q| < 1$. Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Démonstration.

□

Exemple. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} =$



II.2. SÉRIES GÉOMÉTRIQUES DÉRIVÉES.

Proposition 5. Soit $q \in \mathbb{C}$. Chacune des séries de t.g. nq^{n-1} et $n(n-1)q^{n-2}$ appelées *série géométrique dérivée première* et de *série géométrique dérivée seconde* de raison q , converge si, et seulement si, $|q| < 1$. Dans ce cas :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Démonstration. Voir la partie sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes. □

II.3. SÉRIES DE RIEMANN.

Proposition 6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de t.g. $\frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$. De plus, si $\alpha \leq 1$ la série diverge vers $+\infty$.

Démonstration. Voir la partie comparaison séries-intégrales. □

Remarque 6. Il n'y a cependant pas de formule pour déterminer la somme d'une série de Riemann convergente.

Exemple 2. La série de t.g. $\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge vers $+\infty$ et la série de t.g. $\frac{1}{n^2}$ converge. On peut d'ailleurs montrer que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

II.4. SÉRIES EXPONENTIELLES.

Proposition 7. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série de t.g. $\frac{z^n}{n!}$ converge vers e^z i.e. :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Rappel. L'inégalité de Taylor-Lagrange.

Soit $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur I alors pour tout $x \in I$:

Démonstration.

□

III. PREMIÈRES PROPRIÉTÉS.

Proposition 8. Si deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne diffèrent que par un nombre fini de termes, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration.

□

Proposition 9. (Linéarité de la somme).

Si les séries de t.g. u_n et v_n convergent, et si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, alors la série de t.g. $\alpha u_n + \beta v_n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration.

□

Remarque 7. En particulier si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ converge.

⚠ La réciproque est fausse. En effet, il suffit de poser pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n}.$$

On ne peut alors pas écrire :

Corollaire 1. (Cas des séries complexes).

Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes.

La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, les deux séries réelles $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ convergent.

Dans ce cas, on a alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_n)$.

Remarque 8. Cette proposition montre qu'il suffit de s'intéresser au cas des séries réelles. On va voir que, plus précisément, l'étude des séries positives joue un rôle important.

Proposition 10. Soit deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n.$$

- Si $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$, alors $\sum v_n$ diverge vers $+\infty$.
- Si $\sum v_n$ diverge vers $-\infty$, alors $\sum u_n$ diverge vers $-\infty$.

Démonstration.

□

IV. SÉRIES À TERME GÉNÉRAL POSITIF.

Dans cette partie, on va s'intéresser aux séries ayant pour terme général un réel positif. En pratique, d'après le caractère asymptotique de la notion de limite, il suffira de supposer le terme général positif à partir d'un certain rang.

Remarque importante. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite positive, alors la suite de ses sommes partielles, est une suite croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$.
Ceci va simplifier l'étude des séries à terme général positif.

Proposition 11. Une série à terme général positif converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration.

□

On va maintenant voir deux théorèmes de comparaison de séries à terme général positif :

Théorème 1. (TCSTGP). Soit deux suites positives $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n.$$

Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge. Et alors, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

△ Par contraposée, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration.

□

Remarque 10. Ce théorème reste vrai si les suites sont positives seulement à partir d'un certain rang, ou si l'inégalité $u_n \leq v_n$ n'est vraie qu'à partir d'un certain rang. Mais dans ce cas, l'inégalité $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ n'a plus de raison d'être vérifiée.

Exemple 3. La série de t.g. $u_n = \frac{1}{2^n + n}$ converge car pour tout $n \in \mathbb{N}$,

Théorème 2. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites positives telles que $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration.

□

Exercice 1. Étudier la série de t.g. $\frac{1}{n(n+1)}$, et en déduire que la série de t.g. $\frac{1}{n^2}$ converge.

⚠ Lorsque l'on utilise le critère d'équivalence ci-dessus (théorème 2), il est inutile de vérifier la positivité des termes généraux des deux séries. Il suffit de vérifier la positivité de l'un des deux termes, puisque, par équivalence, l'autre est alors positif à partir d'un certain rang.

⚠ Cependant, ce théorème devient faux, si l'on oublie l'hypothèse de positivité :

Exercice 2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge.
2. Montrer que l'on a cependant $u_n \sim v_n$.

V. SÉRIES ABSOLUMENT CONVERGENTES.

Dans cette partie, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite d'éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 5. La série $\sum u_n$ est dite *absolument convergente* si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 3. Toute série absolument convergente est convergente.

Rappel. Partie positive et partie négative d'un réel.

Pour tout réel x on note : $x^+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et $x^- = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

On a alors : $0 \leq x^+ \leq |x|$, $0 \leq x^- \leq |x|$, $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Démonstration.

□

Exemple 4. Les séries de t.g. $\frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\frac{e^{in}}{n^2}$ convergent car convergent absolument.

Remarque 11. Le théorème précédent montre que pour étudier certaines séries, on peut se ramener au cas de séries à t.g. positif ; ce qui justifie l'étude de ces séries vue dans la partie précédente.

⚠ La réciproque du théorème est fausse. Nous verrons que la série harmonique alternée i.e. la série de t.g. $\frac{(-1)^n}{n}$ converge, mais n'est pas absolument convergente.

Théorème 4. Critère de d'Alembert.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes non nuls.

On suppose que la suite $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1. Si $\ell < 1$, alors la série de terme général u_n converge absolument.
2. Si $\ell > 1$, alors la série de terme général u_n diverge grossièrement.
3. Si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure : c'est le cas incertain ou cas douteux.

Le principe de la démonstration est de comparer u_n avec le terme général d'une série géométrique.

Démonstration.

□

Exemple 5. Le critère de d'Alembert permet de retrouver que la série exponentielle i.e. la série de t.g. $u_n = \frac{z^n}{n!}$ converge (absolument) pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Ce qui prouve en particulier $\frac{z^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

Exercice 3. Déterminer la nature de la série de tg $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

VI. THÉORÈME DES SÉRIES ALTERNÉES.

Théorème 5. Si $(u_n)_n$ est une suite de réels positifs, décroissante, et qui converge vers 0, alors la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$ et $|R_n| \leq u_{n+1}$.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k u_k$.

□

Remarque 12. La série harmonique alternée i.e. la série de t.g. $\frac{(-1)^n}{n}$ converge. On peut montrer que cette série converge vers $-\ln 2$.

Exercice 4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la série de t.g. $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$.

Définition 6. Une série $\sum u_n$ est dite *semi-convergente* si elle est convergente, et non absolument convergente.

VII. COMPARAISON SÉRIE-INTÉGRALE.

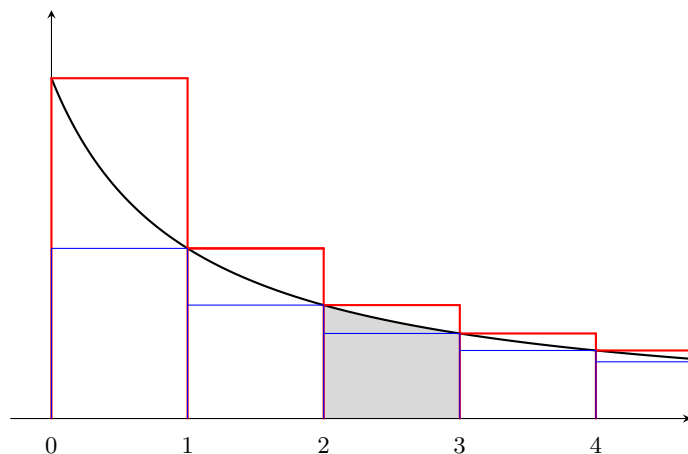
VII.1. LE THÉORÈME DE COMPARAISON SÉRIE-INTÉGRALE.

Proposition 12. Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction définie sur $[p, +\infty[$ positive, continue par morceaux et décroissante.

Alors la série de terme général $f(n)$ converge si, et seulement si, la suite $\left(\int_p^n f(t)dt\right)_{n \geq p}$ converge.

Démonstration.

□



VII.2. APPLICATION AUX SÉRIES DE RIEMANN.

Théorème 6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de t.g. $\frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$. De plus, si $\alpha \leq 1$ la série diverge vers $+\infty$.

Démonstration.

□

VII.3. APPLICATION À LA RECHERCHE D'ÉQUIVALENTS DE SOMMES PARTIELLES.

Soit f une fonction définie sur $[p, +\infty[$ positive, continue par morceaux et décroissante.

Exercice 5. La série harmonique. Dédurre de ce qui précède un encadrement puis un équivalent de

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

VIII. SOMMATION DES RELATIONS DE COMPARAISON.

Dans cette partie, si $\sum u_n$ est une série, on notera $S_n(u) = \sum_{0 \leq k \leq n} u_k$ sa somme partielle d'ordre n .

Lorsque la série est convergente, on notera $R_n(u) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ son reste d'ordre n .

Proposition 13. Sommation des relations de comparaison - Cas convergent.

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries. On suppose que la série $\sum v_n$ est convergente et à terme général positif.

1. Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument et $R_n(u) = O(R_n(v))$,
2. Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument et $R_n(u) = o(R_n(v))$,
3. Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n(u) \sim R_n(v)$.

Démonstration.

□

Exercice 6. Déterminer un équivalent du reste de la série de t.g. $\frac{1}{n^2}$ en utilisant la série de t.g. $\frac{1}{n(n+1)}$.

△ Utiliser une série télescopique est particulièrement efficace puisqu'on peut facilement calculer son reste.

Exemple 6. Un développement asymptotique de la série harmonique.

On a vu que $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$, ce qui suggère de s'intéresser à la suite définie par : $u_n = H_n - \ln(n)$.

⚠ Le réel γ est appelé *constante d'Euler*. On a : $\gamma \approx 0,5772156649$.

On ignore toujours si la constante d'Euler est un nombre rationnel ou pas.

Proposition 14. Sommation des relations de comparaison - Cas divergent.

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries. On suppose que la série $\sum v_n$ est divergente et à terme général positif.

1. Si $u_n = O(v_n)$, alors $S_n(u) = O(S_n(v))$,
2. Si $u_n = o(v_n)$, alors $S_n(u) = o(S_n(v))$,
3. Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ diverge et $S_n(u) \sim S_n(v)$.

⚠ Dans les deux premiers cas, on ne peut pas conclure quant à la convergence de la série $\sum u_n$.

Démonstration.

□

Théorème 7. Théorème de Cesàro - Cas fini.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite ℓ . Alors on a :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

Démonstration.

□

⚠ La réciproque du théorème de Cesàro est fausse : il existe des suites divergentes pour lesquelles la moyenne de Cesàro converge. C'est par exemple le cas de la suite :

Théorème 8. Théorème de Cesàro - Cas infini.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite divergente de limite $+\infty$. Alors on a :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Démonstration.

□

IX. PRODUIT DE CAUCHY DE DEUX SÉRIES ABSOLUMENT CONVERGENTES.

Théorème 9. Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries numériques absolument convergentes. La série de terme général :

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$$

est absolument convergente, et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

La série $\sum c_n$ est appelée *produit de Cauchy* des deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$.

Ce résultat se prouve, par exemple, en montrant que la famille $(a_p b_q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

Remarque 13. On peut affaiblir un peu les hypothèses du théorème précédent : il suffit que $\sum a_n$ soit absolument convergente et $\sum b_n$ convergente (c'est le théorème de Mertens).

Cependant, le théorème devient faux si aucune des deux séries n'est absolument convergente. Par exemple : $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (voir TD).

Exemple 7. Série géométrique dérivée.

Exemple 8. Propriété algébrique de l'exponentielle.