

– TD 2 : Séries numériques –

Exercice 1. Séries semi-convergentes et produit de Cauchy.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

- Justifier que la série $\sum a_n$ est semi-convergente.
- Montrer que le produit de Cauchy des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est une série divergente.

Exercice 2. Après avoir montré la convergence de la série, montrer que la somme suivante est un réel négatif :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}.$$

Exercice 3. Soit $\alpha > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Déterminer un équivalent de u_n en utilisant une comparaison série-intégrale, puis en déduire la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \ln \left(\cos \frac{x}{2^n} \right)$.

Prouver la convergence de la série de terme général u_n , puis déterminer sa somme.

Indication : on pourra utiliser $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

Exercice 5. On considère la série : $\sum_{n \geq 1} \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right)$.

- Prouver que $\pi \sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel à déterminer.
- En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right)$ converge.
- $\sum_{n \geq 1} \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right)$ converge-t-elle absolument ?

Exercice 6. Série harmonique alternée.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.
- En déduire la valeur de la somme de la série harmonique alternée : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice 7. Séries et transformation d'Abel.

- Soit deux suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$. On définit : $S_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k$ et $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$.

Montrer que : $S_n = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k)$.

2. En déduire la convergence de la série de terme général $\frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{n}}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. La formule de Stirling.

Cet exercice a pour but de prouver l'existence d'une constante $K > 0$ telle que : $n! \sim K \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $v_n = \frac{n!}{n^n} e^n$ et $w_n = \frac{v_n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que : $\ln v_{n+1} - \ln v_n = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2. En déduire la nature de la série de terme général : $\ln w_{n+1} - \ln w_n$. Conclure.

Exercice 9.

1. Justifier l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ de : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

2. Montrer que : $R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.

3. Déterminer un équivalent de R_n .

4. Donner la nature de la série de terme général R_n .

Exercice 10. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Même question avec : $v_n = \frac{u_n}{u_1 + \dots + u_n}$.

Indication : on pourra étudier $\ln(1 - v_n)$ dans le cas où la série de t.g. u_n diverge.

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{k}.$$

Déterminer un développement asymptotique à deux termes de R_n .

Exercice 12. Soit (u_n) une suite de réels vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}.$$

Déterminer sa limite puis un développement asymptotique de précision $o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Exercice 13. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

2. Déterminer la limite de $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.

3. En déduire un équivalent de (u_n) .

Exercice 14. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.

Déterminer un équivalent de u_n .

Indication : on pourra étudier la suite auxiliaire $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$.