

– Programme de colle n° 2 : du 21 au 25/09/25 –

- Les questions de cours portent sur tout ce qui suit.
- Les démonstrations à connaître sont indiquées par le symbole .
- Le premier exercice portera sur les séries numériques, mais uniquement pour des recherches de développement asymptotique en utilisant les théorèmes de sommation des relations de comparaison, ou des comparaisons série-intégrale.

En deuxième exercice, on pourra poser un calcul de développement limité ou asymptotique, par exemple d'une fonction réciproque, ou d'une suite définie de manière implicite.

CHAPITRE 3- STRUCTURE DE GROUPE.

COURS UNIQUEMENT

I. RAPPELS SUR LES GROUPEES.

Définition, exemples. Groupe produit. Notion de sous-groupe. Morphisme de groupes.

Soit f un morphisme de G dans G' . Si H est un sous-groupe de G , alors $f(H)$ est un sous-groupe de G' ; et si H' est un sous-groupe de G' , alors $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G . 

Noyau et image d'un morphisme de groupes.

Caractérisation de l'injectivité d'un morphisme de groupes. 

II. SOUS-GROUPE ENGENDRÉ PAR UNE PARTIE. PARTIE GÉNÉRATRICE D'UN GROUPE.

III. LES SOUS-GROUPES DE $(\mathbb{Z}, +)$.

Une partie H de $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ si, et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$. 

IV. GROUPE MONOGÈNE, GROUPE CYCLIQUE.

V. GROUPE $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. GÉNÉRATEURS DE $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe cyclique engendré par $\bar{1}$.

De plus, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, la classe $\bar{a}$ de a engendre le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ si, et seulement si, $a \wedge n = 1$. 

VI. ORDRE D'UN ÉLÉMENT D'UN GROUPE.

Soit $a \in G$ et soit φ l'application :

$$\begin{array}{ccc} \varphi & : & \mathbb{Z} \rightarrow G \\ & & k \mapsto a^k. \end{array}$$

Savoir énoncer et démontrer tous les points qui suivent : 

1. φ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(G, *)$,
2. $\text{Im}(\varphi) = \langle a \rangle$,
3. a est un élément d'ordre fini si, et seulement si, φ est non injective.

Si a est d'ordre fini d : 

1. $\text{Ker}(\varphi) = d\mathbb{Z}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $a^n = e \Leftrightarrow d \mid n$.
3. Pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $n \equiv m [d] \Leftrightarrow a^n = a^m$.
4. $\langle a \rangle = \{e, a, \dots, a^{d-1}\}$, et les éléments de l'ensemble $\{e, a, \dots, a^{d-1}\}$ sont 2 à 2 distincts.

Théorème de Lagrange. L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise l'ordre du groupe. 

VII. STRUCTURE DES GROUPES MONOGÈNES.

Théorème de structure des groupes monogènes. 

Générateurs de $(\mathbb{U}_n, \times)$. Notion de racine *primitive* n -ème de l'unité.

VIII. GROUPE SYMÉTRIQUE.

VIII.1. Permutations de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$.

VIII.2. Décomposition d'une permutation.

VIII.3. Signature d'une permutation. Groupe alterné.