

– Chapitre 6 –

Topologie des espaces vectoriels normés - Partie II

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E et F seront deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels normés.

I. LIMITE D'UNE APPLICATION.

Soit f une application définie sur une partie A de E , et à valeurs dans F . Soit a un point adhérent à A .

I.1. LA NOTION DE LIMITE.

Définition 1. On dit que f tend vers un élément b de F en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - b\| \leq \varepsilon.$$

Cette définition se reformule en utilisant la notion de voisinage :

Proposition 1. Soit a un point adhérent à A et $b \in F$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. f tend vers un élément b de F en a .
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in B(a, \eta) \cap A, f(x) \in B(b, \varepsilon)$.
3. Pour tout voisinage V de b , il existe un voisinage U de a tel que : $\forall x \in U \cap A, f(x) \in V$.
4. Pour tout voisinage V de b , il existe un voisinage U de a tel que : $f(U \cap A) \subset V$.
5. Pour tout voisinage V de b , $f^{-1}(V)$ est un voisinage relatif à A du point a .

Démonstration. Montrons que (4) $\Leftrightarrow$ (5).

□

Proposition 2. Unicité de la limite.

Si f tend vers un élément b de F en a , alors cet élément b est unique.

Définition 2. Si f tend vers b en a , cet élément b est appelé la *limite* de f en a . On note alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \lim_a f = b \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b.$$

Exercice 1. Montrer que si f tend vers b en a , alors b est adhérent à $f(A)$.

Remarque 1. On peut facilement étendre la notion de limite aux cas suivants.

1. Limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$:

2. Lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, limite en $+\infty$:

3. Lorsque $F = \mathbb{R}$, limite égale à $+\infty$ en a adhérent à A :

Théorème 1. Caractérisation séquentielle de la limite.

Soit f une application définie sur une partie A de E , et à valeurs dans F . Soit $a \in \overline{A}$ et $b \in F$.

Alors : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ si, et seulement si, pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a ,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = b$.

Démonstration.

□

I.2. LIMITE D'UN SOMME. LIMITE D'UNE COMPOSÉE.

La caractérisation séquentielle de la limite permet d'obtenir facilement les résultats suivants :

Proposition 3. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = \|b\|$.

Proposition 4. Soit f et g deux applications définies sur A et à valeurs dans F qui admettent respectivement b et c pour limite en a . Alors, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) = \alpha \cdot b + \beta \cdot c.$$

Proposition 5. Soit f une application définie sur A et à valeurs dans F qui admet b pour limite en a . Soit φ une application définie sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui admet λ pour limite en a . Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \cdot f(x) = \lambda \cdot b.$$

Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés.

Théorème 2. Soit f une application définie sur une partie A de E et à valeurs dans F .

Soit g une application définie sur une partie B de F et à valeurs dans G .

On suppose que $f(A) \subset B$. Soit $a \in \overline{A}$, $b \in F$ et $c \in G$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c.$$

Remarque 2. Comme a est adhérent à A , on a déjà prouvé que si f tend vers b en a , alors b est adhérent à $f(A)$ et donc à B . Ainsi, considérer la limite de g en b a bien un sens.

Démonstration. On pourrait là aussi appliquer la caractérisation séquentielle de la limite, mais pour changer nous allons utiliser la notion de voisinage.

□

I.3. LIMITE D'UNE FONCTION À VALEURS DANS UN PRODUIT FINI D'ESPACE VECTORIEL NORMÉ.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(F_1, N_1), \dots, (F_p, N_p)$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés.

On s'intéresse ici à une application définie sur une partie A de E et à valeurs dans le produit cartésien

$$F = \prod_{k=1}^p F_k \text{ (muni de la norme produit).}$$

Comme dans le cas des suites, on définit pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la $k^{\text{ème}}$ composante de la fonction f de la manière suivante :

$$\forall x \in E, f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \in \prod_{k=1}^p F_k,$$

Soit a un point adhérent à A et $b = (b_1, \dots, b_p) \in F$.

Proposition 6. La fonction f tend vers b en a si, et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la fonction f_k tend vers b_k en a .

Démonstration. On applique la caractérisation séquentielle de la limite.

□

II. CONTINUITÉ.

II.1. CONTINUITÉ PONCTUELLE.

On suppose toujours que f est une application définie sur une partie A de E à valeurs dans F . Mais on suppose désormais que a est un point de A .

Définition 3. On dit que f est continue en a , si f tend vers $f(a)$ en a , i.e. si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon.$$

Cette définition se reformule en utilisant la notion de voisinage :

Proposition 7. Soit a un point de A . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. f est continue en a .
2. Pour tout voisinage V de $f(a)$, il existe un voisinage U de a tel que : $f(U \cap A) \subset V$.
3. Pour tout voisinage V de $f(a)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage relatif à A du point a .

Proposition 8. f est continue en a si, et seulement si, f admet une limite en a .

Autrement-dit, si f admet une limite en a , alors cette limite est forcément égale à $f(a)$.

△ En première année, pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ nous disions : « f est continue en a si, et seulement si, f admet une limite finie en a ». Ici la limite de f , quand elle existe, est par définition, un élément b de F .

Démonstration. Supposons que f admette une limite b en a . Montrons que $b = f(a)$.

□

Théorème 3. Caractérisation séquentielle de la continuité.

Soit f une application définie sur une partie A de E , et à valeurs dans F . Soit $a \in A$.

Alors : f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a , $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(a)$.

Proposition 9. Soit f et g sont deux applications définies sur A et à valeurs dans F . Si f et g sont continues en a alors, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, l'application $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ est continue en a .

Et comme la fonction constante égale à 0_F est continue au point a , on en déduit :

Corollaire 1. L'ensemble des fonctions définies sur A et à valeurs dans F continues au point a , forment un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{F}(A, F)$ des applications définies sur A , et à valeurs dans F .

Proposition 10. Soit f une application définie sur A et à valeurs dans F .

Soit φ une application définie sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si φ et f sont continues au point a , alors $\varphi \cdot f$ est continue au point a .

Remarque 3. Le résultat est en particulier vrai pour un produit de deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés.

Théorème 4. Soit f une application définie sur une partie A de E et à valeurs dans F .

Soit g une application définie sur une partie B de F et à valeurs dans G .

On suppose que $f(A) \subset B$. Soit $a \in A$ et soit $b = f(a)$.

Si f est continue en a et g est continue en b alors $g \circ f$ est continue en a .

Proposition 11. Si a un point adhérent à A mais qui n'appartient pas à A , alors : la fonction f est prolongeable par continuité en a si, et seulement si, f admet une limite $b \in F$ en a .

Dans ce cas, il y a unicité du prolongement par continuité de f en a . C'est la fonction $\tilde{f}$ définie par :

$$\forall x \in A \cup \{a\}, \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ b & \text{si } x = a. \end{cases}$$

II.2. CONTINUITÉ GLOBALE.

On suppose toujours que f est une application définie sur une partie A de E à valeurs dans F .

Définition 4. On dit que f est continue sur A , si f est continue en tout point a de A .

Notations. On note $\mathcal{C}(A, F)$ ou $\mathcal{C}^0(A, F)$ l'ensemble des fonctions continues sur A , et à valeurs dans F .

Proposition 12. L'ensemble $\mathcal{C}(A, F)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{F}(A, F)$ des applications définies sur A , et à valeurs dans F .

Démonstration. C'est l'intersection, pour tout $a \in A$, de l'ensemble des applications de A dans F continues au point a . □

Proposition 13. Soit f et g deux applications définies sur A et à valeurs dans F . Si f et g coïncident sur une partie D de A dense. Alors $f = g$.

Démonstration. Soit D une partie de A dense. On suppose que pour tout $x \in D$, $f(x) = g(x)$.
On veut montrer que pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$.

□

Théorème 5. Soit f une application de A dans F . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur A ,
2. Pour tout ouvert Y de F , $f^{-1}(Y)$ est un ouvert relatif de A ,
3. Pour tout fermé Y de F , $f^{-1}(Y)$ est un fermé relatif de A .

Démonstration.

□

Exemple 1. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) =$
 La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, on obtient que $\mathbb{Z}$ est fermé puisque $\mathbb{Z} =$

Pour rappel, on a déjà prouvé que $\mathbb{Z}$ était fermé en utilisant la caractérisation séquentielle des fermés (un peu long) ou beaucoup plus simplement en remarquant que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est ouvert puisque :

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} =$$

Exemple 2. Soit f la fonction racine carrée définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
 $f^{-1}] - 2, 2[=$

II.3. APPLICATIONS UNIFORMÉMENT CONTINUES, APPLICATIONS LIPSCHITZIENNES.

Définition 5. Soit f une fonction définie sur A .
 On dit que f est *uniformément continue* sur A si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in A^2, \|x - y\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

Remarque 4. • La continuité de f sur A s'écrit :

$$\forall y \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - y\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

La différence entre les deux notions réside dans le fait que dans l'uniforme continuité η ne dépend que de ε , alors que pour la continuité, il dépend de y et de ε .

- Si f est uniformément continue sur A , alors f est continue sur A .

Exemple 3. La fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur $[0, 1]$.

Exemple 4. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

⚠ On a vu que l'uniforme continuité implique la continuité, et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ prouve que la réciproque est fausse.

Définition 6.

- Soit $k > 0$. On dit qu'une fonction f définie sur A est *k-lipschitzienne* si :

$$\forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

- On dit qu'une fonction f définie sur A est *lipschitzienne* s'il existe $k > 0$ tel que f soit *k-lipschitzienne*.

Proposition 14. Si f est lipschitzienne sur A , alors f est uniformément continue sur A .

Démonstration.

□

Exemple 5. Pour montrer que la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur $[0, 1]$, il suffisait de montrer qu'elle est 2-lipschitzienne :

⚠ Cependant la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple suivant :

Exercice 2. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, mais pas lipschitzienne.

Exemple 6. D'après la deuxième inégalité triangulaire, l'application $\|\cdot\|$ définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne.

Exercice 3. Soit A est une partie non vide de E . Montrer que l'application f définie pour tout $x \in E$ par $f(x) = d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

III. APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES.

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ i.e. soit u une application linéaire de E dans F .

III.1. CRITÈRE DE CONTINUITÉ D'UNE APPLICATION LINÉAIRE.

Théorème 6. Critère de continuité d'une application linéaire.

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. Il existe $k \geq 0$ tel que : $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq k\|x\|$,
2. u est lipschitzienne,
3. u est uniformément continue sur E ,
4. u est continue,
5. u est continue en 0_E ,
6. u est bornée sur $B_f(0_E, 1)$.

Démonstration.

□

Méthode. Concrètement, pour prouver qu'une application linéaire est continue on cherchera le plus souvent à prouver l'existence d'une constante $k \geq 0$ telle que : $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq k\|x\|$.

△ On montre facilement qu'une application linéaire est, soit continue en tout point, soit discontinue en tout point.

Notations. On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues.

Proposition 15. $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.

Exemple 7. On munit $\mathbb{K}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. L'endomorphisme D de dérivation des polynômes n'est pas continue.

III.2. NORME SUBORDONNÉE (OU NORME D'OPÉRATEUR).

Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ i.e. soit u une application linéaire continue de E dans F .

Proposition 16. L'ensemble $\{\|u(x)\| \mid \|x\| \leq 1\}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Démonstration.

□

Définition 7. On appelle *norme subordonnée* (ou *norme d'opérateur*) et l'on note $\|u\|$ (ou $\|u\|_{\text{op}}$) le réel :

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|.$$

Remarque 5. L'adjectif subordonnée précise que la quantité $\|u\|$ dépend du choix des normes utilisées sur E et F et pas seulement de u .

Proposition 17. Pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, on a :

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

On en déduit, pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| \leq \|u\| \times \|x\|.$$

Démonstration.

□

Remarque 6. Le réel $\|u\|$ est en fait le plus petit réel k tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq k\|x\|$.

Exemple 8. Quelle que soit la norme utilisée sur E , on a : $\|\text{Id}_E\| = 1$.

Méthode.

Comme vu plus haut, prouver l'existence d'une constante $k \geq 0$ telle que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq k\|x\|$ prouve la continuité de u , et prouve de plus que :

$$\|u\| \leq k.$$

Dès lors, pour prouver que $\|u\| = k$ il suffira :

- soit d'exhiber un vecteur non nul x tel que $\|u(x)\| = k\|x\|$, mais ce n'est pas toujours possible,
- soit d'exhiber une suite (x_n) de vecteur non nuls telle que $\frac{\|u(x_n)\|}{\|x_n\|}$ converge vers k .

△ Nous verrons plus tard que si E est de dimension finie, on peut toujours s'en sortir avec le premier point de la méthode.

Exercice 4. On munit $\mathbb{K}$ du module et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme ∞ définie par :

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \|A\|_\infty = \max\{|a_{i,j}| \mid 1 \leq i, j \leq n\}.$$

Montrer que la forme linéaire trace, notée tr , est continue et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 5. Soit E un espace préhilbertien réel (muni de la norme euclidienne) et soit $a \in E \setminus \{0_E\}$. On note φ_a la forme linéaire définie sur E par $\varphi_a : x \mapsto \langle a, x \rangle$. Montrer que φ_a est continue et calculer sa norme subordonnée.

Remarque 7. Soit A une partie de E .

$$A^\perp =$$

Proposition 18. Étant donné deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés E et F , $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Démonstration.

□

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés.

Proposition 19. Si $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}_c(F, G)$, alors : $\|v \circ u\| \leq \|u\| \times \|v\|$.
On dit que la norme subordonnée est *sous-multiplicative*. On dit aussi qu'il s'agit d'une *norme d'algèbre*.

Démonstration.

□

Exercice 6. Montrer que la norme ∞ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|A\|_\infty = \max\{|a_{i,j}| \mid 1 \leq i, j \leq n\},$$

n'est pas une norme sous-multiplicative.

Le critère de continuité d'une application linéaire se généralise au cas des applications multilinéaires :

Proposition 20. Soit $E_1, \dots, E_p$ et F des espaces vectoriels normés. Soit φ une application p -linéaire de $\prod_{j=1}^p E_j$ dans F . On munit $\prod_{j=1}^p E_j$ de la norme produit.

L'application φ est continue si, et seulement si, existe $k \geq 0$ tel que :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{j=1}^p E_j, \|\varphi(x_1, \dots, x_p)\| \leq k \prod_{j=1}^p \|x_j\|$$

Exemple 9. Soit E un espace préhilbertien réel (muni de la norme euclidienne).

L'application $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ est continue sur E^2 .

III.3. ADAPTATION AUX MATRICES.

Nous verrons plus tard que toute application linéaire définie sur un espace vectoriel normé de dimension finie sera automatiquement continue.

Définition 8. Supposons $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ chacun muni d'une norme. Étant donné $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle *norme subordonnée* de A , et l'on note $\|A\|$, la norme subordonnée de l'application linéaire canoniquement associée à A .

Cette définition a bien un sens puisque l'application linéaire canoniquement associée à A est définie sur $\mathbb{K}^p$ qui est bien un espace vectoriel normé de dimension finie.

Proposition 21. L'application $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition 22. La norme subordonnée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ vérifie :

$$\|A\| = \sup_{\|X\| \leq 1} \|AX\| = \sup_{\|X\|=1} \|AX\| = \sup_{X \neq 0_{\mathbb{K}^p}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}.$$

On a de plus : $\forall X \in \mathbb{K}^p, \|AX\| \leq \|A\| \|X\|$.

Plus précisément, $\|A\|$ est le plus petit réel k tel que pour tout $X \in \mathbb{K}^p, \|AX\| \leq k\|X\|$.

Exemple 10. Quelle que soit la norme utilisée sur $\mathbb{K}^n$, on a : $\|I_n\| = 1$.

Exercice 7. On munit $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ de la norme 1. Montrer que pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on a :

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{1 \leq i \leq n} |a_{i,j}|.$$

Exercice 8. On verra en TD que si $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ sont munis de la norme ∞ , on a :

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq p} |a_{i,j}|.$$

IV. PARTIES COMPACTES D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ.

Définition 9. (Propriété de Bolzano-Weierstrass).

On dit qu'une partie A de E est *compacte* si toute suite de A possède une valeur d'adhérence dans A . Autrement-dit, A est compacte si de toute suite de A on peut extraire une sous-suite convergente dont la limite est dans A .

⚠ Il ne suffit pas d'exhiber une suite extraite convergente. Il faut vérifier que la limite de cette suite extraite appartient à A .

Proposition 23. Une partie compacte est fermée et bornée.

Démonstration.

□

La réciproque est vraie dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$:

Proposition 24. Tout fermé borné de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est compact.
En particulier, tout segment de $\mathbb{R}$ est compact.

Démonstration.

□

⚠ Les segments de $\mathbb{R}$ ne sont pas les seuls compacts de $\mathbb{R}$. Par exemple,

Proposition 25. Tout fermé relatif d'une partie compacte est compact. Autrement-dit, si F est un fermé et A un compact, alors $F \cap A$ est compact.

En particulier, si F est un fermé inclus dans un compact A , alors F est compact.

Démonstration. Soit F un fermé et A un compact, montrons que $F \cap A$ est compact.

□

Proposition 26. Caractérisation de la convergence d'une suite dans un compact.

Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.

Démonstration.

□

Proposition 27. Tout produit (fini) de compacts est un compact.

Plus précisément, supposons que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, A_k est un compact d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé (E_k, N_k) . Alors, $\prod_{k=1}^p A_k$ est un compact de $\prod_{k=1}^p E_k$ muni de la norme produit, notée $\|\cdot\|$.

Démonstration. Démontrons la propriété dans la cas $p = 2$.

□

Corollaire 2. Les ensembles de la forme $\prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$ sont des compacts de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Un ensemble de cette forme est appelé un *pavé* de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration.

□

Corollaire 3. Les boules fermées de $\mathbb{K}^n$ sont compactes pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Démonstration.

□

Corollaire 4. Une partie de $\mathbb{K}^n$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ est compacte si, et seulement si, elle est fermée bornée.

Démonstration.

□

Exemple 11. Dans $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ la sphère unité $S(0, 1)$ est fermée et bornée donc compacte.

Proposition 28. Un compact non vide de $\mathbb{R}$ admet un plus petit et un plus grand élément.

Démonstration.

□

V. APPLICATIONS CONTINUES SUR UNE PARTIE COMPACTE.

Théorème 7. L'image d'un compact par une application continue est un compact.

Autrement-dit, si A est un compact de E , et f une application continue sur A et à valeurs dans F , alors l'ensemble $f(A)$ est un compact de F .

Démonstration.

□

Théorème 8. Théorème des bornes atteintes.

Toute application continue sur un compact non vide A de E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration.

□

Exercice 9. Soit A un compact non vide de E . Soit $x \in E$.
Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $d(x, A) = d(x, a)$.

Exercice 10. Soit A et B deux compacts non vides de E . On appelle distance de A à B et on note $d(A, B)$ le réel défini par :

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) \mid (x, y) \in A \times B\}.$$

Montrer qu'il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $d(A, B) = d(a, b)$.

Théorème 9. Théorème de Heine.

Toute application continue sur une partie compacte A de E est uniformément continue sur A .

Démonstration.

□

VI. ESPACES VECTORIELS NORMÉS DE DIMENSION FINIE.

VI.1. ÉQUIVALENCE DES NORMES EN DIMENSION FINIE.

Théorème 10. Toutes les normes d'un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.

Démonstration. Traitons d'abord le cas où $E = \mathbb{K}^n$.

Il suffit montrer que toute norme N de $\mathbb{K}^n$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

□

Remarque importante. En dimension finie, la convergence d'une suite, ne dépend donc pas du choix de la norme puisque toutes les normes sont équivalentes.

VI.2. UTILISATION DES COORDONNÉES DANS UNE BASE.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie égale à $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Soit (a_n) une suite d'éléments de E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \sum_{k=1}^p a_n^{(k)} e_k,$$

où $a_n^{(k)} \in \mathbb{K}$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout k , la suite $(a_n^{(k)})$, qui est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ est appelée la $k^{\text{ème}}$ suite composante.

Tout élément ℓ de E sera décomposé : $\ell = \sum_{k=1}^p \ell_k e_k$ avec $\ell_k \in \mathbb{K}$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Proposition 29. Une suite (a_n) d'éléments de E converge vers un élément ℓ de E si, et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la suite de scalaires $(a_n^{(k)})$ converge vers ℓ_k .

Démonstration.

□

Soit f une application définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé quelconque et à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie égale à $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

Pour tout $x \in A$ on pose :

$$f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x) e_k,$$

où $f_k(x) \in \mathbb{K}$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et pour tout $x \in A$.

Pour tout k , l'application f_k définie sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est appelée la $k^{\text{ème}}$ application composante.

Soit a un point adhérent à A .

Proposition 30. L'application f tend vers ℓ en a si, et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, l'application f_k tend vers ℓ_k en a .

Démonstration. Il suffit d'appliquer la caractérisation séquentielle de la limite et la proposition précédente. □

⚠ Dans le cas où $a \in A$, on obtient une proposition similaire caractérisant la continuité en a .

VI.3. APPLICATION AUX SÉRIES VECTORIELLES.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie égale à $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Soit (a_n) une suite d'éléments de E .

Définition 10. La série $\sum a_n$ est dite *absolument convergente* si la série $\sum \|a_n\|$ est convergente.

Théorème 11. Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration.

□

Exemples 12.

VI.4. CONTINUITÉ DES APPLICATIONS LINÉAIRES.

Théorème 12. Si E est de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}_c(E, F)$. Autrement-dit, toute application linéaire définie sur un espace vectoriel normé de dimension finie est continue.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ où $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie égale à n et $(F, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé quelconque.

□

Exercice 11. Soit E est un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que tous les sous-espaces vectoriels F de E sont fermés.

Nous verrons que, plus généralement, un sous-espace de dimension finie de n'importe quel evn E (même si E est de dimension infinie) est fermé.

Théorème 13. Une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie est compacte si, et seulement si, elle est fermée et bornée.

Démonstration. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie égale à n .

□

Exemple 13. Nous avons vu que dans $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ les boules fermées $B_f(a, r)$ et les sphères $S(a, r)$ sont compactes.

On déduit du résultat précédent que cela reste vrai dans n'importe quel espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie.

Remarque importante. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ où E est de dimension finie. Alors, u est continue et on a déjà vu que : $\|u\| = \sup \{\|u(x)\| \mid x \in S(0, 1)\}$.

Or, $S(0, 1)$ est compact donc cette borne supérieure est atteinte i.e. qu'il existe $x \in S(0, 1)$ tel que

$$\|u(x)\| = \|u\|.$$

Autrement-dit, il existe un vecteur $x \neq 0_E$ tel que :

$$\|u(x)\| = \|u\| \|x\|.$$

Théorème 14. Une suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie converge si, et seulement si, elle a une unique valeur d'adhérence.

Démonstration. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et (u_n) une suite bornée.

□

Théorème 15. Un sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.

Démonstration. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

□

Exemple 14. $\mathbb{K}_n[X]$ est un fermé de $\mathbb{K}[X]$, quelle que soit la norme utilisée.

VI.5. APPLICATIONS POLYNOMIALES.

Rappel. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on appelle i -ème application coordonnée, et l'on note e_i^* , l'unique forme linéaire de E vérifiant :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}.$$

Alors, pour tout $x \in E$, si x a pour coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$e_i^*(x) = x_i.$$

Soit $(k_1, \dots, k_n)$ des entiers naturels. On définit alors une application f sur E en posant :

$$f = (e_1^*)^{k_1} \times \dots \times (e_n^*)^{k_n}.$$

Si x a pour coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, on a alors :

$$f(x) = x_1^{k_1} \times \dots \times x_n^{k_n}.$$

Définition 11. On appelle application polynomiale, toute application de E dans $\mathbb{K}$ obtenue comme combinaison linéaire d'applications de la forme ci-dessus.

Exemple 15. Prenons $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On définit une application polynomiale, en posant par exemple :

$$f = e_1^* \times e_2^* - e_1^* \times e_3^* + 2(e_1^*)^3 \times e_2^* \times (e_3^*)^2.$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a alors :

$$f(x, y, z) =$$

Proposition 31. Toute application polynomiale est continue sur E .

Démonstration.

□

Corollaire 5. L'application déterminant : $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \det M \end{array}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration.

□

Corollaire 6. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est une partie ouverte et dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration.

□

Proposition 32. Soit $E_1, \dots, E_p$ et F des espaces vectoriels normés. Si $E_1, \dots, E_p$ sont de dimension finie, alors toute application p -linéaire de $\prod_{j=1}^p E_j$ dans F est continue.

Démonstration. Cas $p = 2$. Soit φ une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F .

Notons $(a_1, \dots, a_n)$ une base de E_1 et $(b_1, \dots, b_m)$ une base de E_2 .

Soit $(x, y) \in E_1 \times E_2$. On décompose les deux vecteurs x et y :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i a_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^m y_j b_j.$$

Par bilinéarité, on a :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j \varphi(a_i, b_j).$$

Notons p_i et q_j les formes linéaires définies sur $E_1 \times E_2$ par :

$$\forall (x, y) \in E_1 \times E_2, \quad p_i(x, y) = x_i \quad \text{et} \quad q_j(x, y) = y_j.$$

On a alors :

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \varphi(a_i, b_j) p_i q_j.$$

$E_1 \times E_2$ étant un espace vectoriel de dimension finie, les formes linéaires p_i et q_j sont continues.

Ainsi, φ est continue comme produit et combinaison linéaires de formes linéaires continues.

□

VII. CONNEXITÉ PAR ARCS.

On rappelle que E désigne un espace vectoriel normé.

Définition 12. Soit a et b deux éléments d'une partie A de E .

On appelle *arc*, ou *chemin* de A reliant a à b , toute application continue notée γ définie sur $[0, 1]$ et à valeurs dans A telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

On dit alors que l'arc γ *relie* a à b . Le point a est appelé l'*origine* de l'arc et b son *extrémité*.

⚠ Dire que γ est un arc de A nécessite que pour tout $t \in [0, 1]$, $\gamma(t) \in A$.

Proposition 33. Soit A une partie d'un espace vectoriel normé. La relation « être relié par un chemin dans A » est une relation d'équivalence sur A . Les classes d'équivalence de cette relation sont appelées les *composantes connexes par arcs* de A .

Démonstration.

□

Définition 13. Une partie A de E est dite *connexe par arcs* si pour tout $(a, b) \in A^2$, il existe un arc de A reliant a à b .

Autrement-dit, A est connexe par arcs si A n'a qu'une seule composante connexe par arcs.

Exemple 16. Toute partie convexe A est connexe par arcs.

En particulier, les sous-espaces affines, les boules ouvertes et les boules fermées, sont convexes donc connexes par arcs. Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont convexes donc connexes par arcs.

Exercice 12. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ n'est pas connexe par arcs, et déterminer ses composantes connexes par arcs.

Exercice 13. Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ est connexe par arcs.

Proposition 34. L'image par une fonction continue d'une partie connexe par arcs est connexe par arcs.

Démonstration.

□

Exercice 14. 1. Montrer que l'application déterminant de $GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ est surjective.
 2. En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

△ Cependant, on verra en TD que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Définition 14.

- Une partie non vide A de E est dite *étoilée par rapport à un point a* de E si :

$$\forall x \in A, \quad \{(1-t)a + tx \mid t \in [0, 1]\} \subset A.$$

- Une partie A de E est dite *étoilée* si elle est étoilée par rapport à au moins un point a de E .

Concrètement une partie A est étoilée par rapport à a si tout point peut être relié à a par un chemin rectiligne.

Proposition 35. Toute partie étoilée est connexe par arcs.

Démonstration.

□