

– Programme de colle n° 6 : du 02/11 au 06/11 –

Les questions de cours et les exercices portent sur tout ce qui suit.

CHAPITRE 6 - TOPOLOGIE DES ESPACES VECTORIELS NORMÉS (PARTIE I)

I. NORMES ET ESPACES VECTORIELS NORMÉS.

II. TOPOLOGIE D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ.

II.8. Topologie induite sur une partie A de E .

△ Bien connaître la définition d'un ouvert, d'un fermé et d'un voisinage relatif à une partie.

III. COMPARAISON DE NORMES.

Toute suite qui converge au sens de $\|\cdot\|$ converge aussi au sens de $\|\cdot\|'$ si, et seulement si, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in E$, $\|x\|' \leq \alpha \|x\|$. 

Notion de normes équivalentes.

Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$, et $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$.

Soit $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes quelconques définies sur un même espace vectoriel E .

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. Ces normes sont équivalentes.
2. Ces normes définissent les mêmes parties bornées.
3. Ces normes définissent les mêmes voisinages.
4. Ces normes définissent les mêmes parties ouvertes.
5. Ces normes définissent les mêmes parties fermées.
6. Ces normes définissent les mêmes suites convergentes.

△ Savoir démontrer que deux normes sont équivalentes si, et seulement si, elles définissent, pour tout point de E , les mêmes voisinages. 

CHAPITRE 7 - TOPOLOGIE DES ESPACES VECTORIELS NORMÉS (PARTIE II).

△ CE CHAPITRE N'EST PAS TERMINÉ.

I. LIMITE D'UNE APPLICATION.

I.1. La notion de limite.

Caractérisation séquentielle de la limite. 

Soit a un point adhérent à A et $b \in F$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. f tend vers un élément b de F en a .
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in B(a, \eta) \cap A, f(x) \in B(b, \varepsilon)$.
3. Pour tout voisinage V de b , il existe un voisinage U de a tel que : $\forall x \in U \cap A, f(x) \in V$.
4. Pour tout voisinage V de b , il existe un voisinage U de a tel que : $f(U \cap A) \subset V$.
5. Pour tout voisinage V de b , $f^{-1}(V)$ est un voisinage relatif à A du point a .

I.2. Limite d'une composée.

I.3. Limite d'une fonction à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.

II. CONTINUITÉ.

II.1. Continuité ponctuelle.

Soit a un point de A . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. f est continue en a .
2. Pour tout voisinage V de $f(a)$, il existe un voisinage U de a tel que : $f(U \cap A) \subset V$.
3. Pour tout voisinage V de $f(a)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage relatif à A du point a .

II.2. Continuité globale.

Soit f une application de A dans F . Les affirmations suivantes sont équivalentes : 

1. f est continue sur A ,
2. Pour tout ouvert Y de F , $f^{-1}(Y)$ est un ouvert relatif de A ,
3. Pour tout fermé Y de F , $f^{-1}(Y)$ est un fermé relatif de A .

II.3. Applications uniformément continues, applications lipschitziennes.

 On verra le théorème de Heine plus tard.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, mais pas lipschitzienne. 

III. APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES.

III.1. Critère de continuité d'une application linéaire.

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. Il existe $k \geq 0$ tel que : $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq k\|x\|$,
2. u est lipschitzienne,
3. u est uniformément continue sur E ,
4. u est continue,
5. u est continue en 0_E ,
6. u est bornée sur $B_f(0_E, 1)$.

III.2. Norme subordonnée (ou norme d'opérateur).

Pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, on a : $\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. 

On en déduit que pour tout $x \in E$: $\|u(x)\| \leq \|u\| \times \|x\|$.

△ Savoir expliquer la méthode de calcul de la norme subordonnée d'une application linéaire continue.

La norme subordonnée est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$, et elle est sous-multiplicative. 

Critère de continuité d'une application multilinéaire.

III.3. ADAPTATION AUX MATRICES.

Si on munit $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ de la norme 1, alors pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on a :

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{1 \leq i \leq n} |a_{i,j}|. \quad \text{img alt="pencil icon" data-bbox="590 330 608 342"/>$$