– Chapitre 7 : Rappels d'algèbre linéaire – Application linéaire - Dimension finie

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera un sous-corps de $\mathbb{C}$.

I. Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels.

I.1. Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 1. On appelle $\mathbb{K}$-*espace vectoriel*, ou *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ tout triplet $(E,+,\cdot)$ où E est un ensemble non vide, $+$ une loi de composition interne et $\cdot$ une application :

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E\\ (\alpha,x) & \longmapsto & \alpha\cdot x\end{array}$$

appelée *loi de composition externe*, et vérifiant les huit propriétés suivantes :

1. $(E,+)$ est un groupe abélien

2. $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ \forall x\in E,\ (\alpha\beta)\cdot x=\alpha\cdot(\beta\cdot x)$

3. $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ \forall x\in E,\ (\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$

4. $\forall\alpha\in\mathbb{K},\ \forall(x,y)\in E^2,\ \alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$

5. $\forall x\in E,\ 1\cdot x=x$.

Les éléments de E sont alors appelés des *vecteurs*.

Exemples de référence.

1. $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2. Si X est un ensemble, alors $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$f+g:\ \begin{array}{ccc}X & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ x & \longmapsto & f(x)+g(x)\end{array}\qquad\qquad \alpha\cdot f:\ \begin{array}{ccc}X & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ x & \longmapsto & \alpha\cdot f(x).\end{array}$$

3. Plus généralement, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $\mathcal{F}(X,E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

4. En particulier, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'ensemble $E^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, muni les lois :

$$(u_n)_n+(v_n)_n=(u_n+v_n)_n\qquad\text{et}\qquad\alpha\cdot(u_n)_n=(\alpha u_n)_n.$$

5. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Dorénavant, $(E,+,\cdot)$ désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 1. Pour tout $(x,y)\in E^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$ alors :

- $\alpha\cdot x=0_E\Leftrightarrow(\alpha=0_{\mathbb{K}}\text{ ou }x=0_E)$,
- $(-1)\cdot x=-x$, plus généralement, pour tout $x\in E$ et $\alpha\in\mathbb{K}$, $-(\alpha\cdot x)=\alpha\cdot(-x)=(-\alpha)\cdot x$.
- $(\alpha-\beta)\cdot x=\alpha\cdot x-\beta\cdot x$, $\qquad\alpha\cdot(x-y)=\alpha\cdot x-\alpha\cdot y$.

Produit cartésien d'espaces vectoriels.

Définition 2. Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors leur produit cartésien $E \times F$ muni :
- de la loi interne définie par : $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
- de la loi externe définie par : $\alpha \cdot (x, y) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y)$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel appelé *espace vectoriel produit.*
Les deux lois ainsi définies, sont appelées les *lois produits.*

I.2. Sous-espaces vectoriels.

Définition 3. On appelle *sous-espace vectoriel* de E toute partie non vide F de E vérifiant :
- F est stable par addition : $\forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F$
- F est stable par multiplication par un scalaire : $\forall x \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha \cdot x \in F$.

Les deux points précédents peuvent être condensés en disant que F est stable par combinaison linéaire :

$$\forall (x, y) \in F^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2,\ \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F,$$

ou encore que : $\forall (x, y) \in F^2, \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha \cdot x + y \in F$.

Remarque 1.
- E et $\{0_E\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E, appelés sous-espaces vectoriels triviaux.
- En posant $\alpha = -1$, dans le second point, on obtient qu'un sous-espace vectoriel est stable par passage à l'opposé.
- Tout sous-espace vectoriel F de E est un sous-groupe de $(E, +)$ En effet :

- Tout sous-espace vectoriel de E contient donc 0_E.

Proposition 2. Tout sous-espace vectoriel F de E, muni des lois induites, est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 1.
- Les ensembles $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Plus généralement c'est le cas de tout ensemble de la forme $a\mathbb{R}$ avec $a \in \mathbb{C}$.
- L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
- L'ensemble $\{f \in \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$.
- L'ensemble $\{f \in \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(1) = 1\}$ n'en est pas un car ne contient pas la fonction nulle.
- L'ensemble des suites arithmétiques est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, mais pas celui des suites géométriques. En effet :

Exercice 1. Citer des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$.

Intersection de sous-espaces vectoriels.

Proposition 3. Une intersection d'une famille non vide (finie ou non) de sous-espaces vectoriels de E, est un sous-espace vectoriel de E.
Autrement-dit, si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E (avec I un ensemble quelconque non vide), alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

⚠ Une réunion de sous-espaces vectoriels n'est, en général, pas un sous-espace vectoriel.
Par exemple, $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, mais pas $\mathbb{R}\cup i\mathbb{R}$. En effet, $\mathbb{R}\cup i\mathbb{R}$, n'est pas stable par addition :

I.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie.

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit A une partie quelconque de E.

Définition 4. On appelle *sous-espace vectoriel engendré* par A l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A. On le note Vect A.

Cette intersection a un sens car il existe toujours au moins un sous-espace vectoriel de E contenant A, à savoir E lui-même.

Exemple 2. Vect $\varnothing =$ Vect $\{0\} =$ Vect $E =$

Proposition 4. L'ensemble Vect A est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant A.
Autrement-dit :
- Vect A est un sous-espace vectoriel de E contenant A,
- pour tout sous-espace vectoriel F de E : $A\subset F \Rightarrow \text{Vect } A\subset F$.

Démonstration.

□

Exercice 2. Montrer que Vect $A = A$ si, et seulement si, A est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 5. Vect A est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A.
Autrement-dit, un vecteur x de E appartient à Vect A si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}$, $(a_1, \dots, a_p) \in A^p$, et $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot a_i.$$

Idée de la démonstration.
Notons B l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A. Pour montrer que Vect $A = B$, il suffit de montrer que B est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

Exemple 3. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, Vect $\{1, i\} =$

Exemple 4. Vect $\{\exp, x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\} = \{$

Exercice 3. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par une partie A que l'on déterminera.

Définition 5. On appelle *droite vectorielle* de E tout sous-espace vectoriel de E engendré par une partie constituée d'un vecteur non nul.
Ainsi, si a est un vecteur non nul, alors *la droite vectorielle engendrée par* a est Vect $\{a\}$.
De plus, on a Vect $\{a\} = \{\alpha \cdot a \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$.
Ce sous-espace vectoriel se note aussi Vect a ou $\mathbb{K} \cdot a$.

Exemple 5. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, on a : Vect $\{1\} =$ Vect $\{i\} =$

Proposition 6. Si D est une droite vectorielle de E, alors pour tout vecteur non nul b de D, on a $D =$ Vect $\{b\}$.

Exemple 6. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, on a vu que la droite vectorielle engendrée par 1 est $\mathbb{R}$, et celle engendrée par i est $i\mathbb{R}$.

Exercice 4. Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, quelle est la droite vectorielle engendrée par 1 ? Quelle est celle engendrée par i ?

Exercice 5. Soit a une fonction continue sur un intervalle I. Pourquoi peut-on affirmer que l'ensemble des solutions sur I de l'équation $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ est une droite vectorielle ?

Définition 6. On appelle *plan vectoriel* de E tout sous-espace vectoriel de E engendré par une partie constituée de deux vecteurs non colinéaires.
Ainsi, si a et b sont deux vecteurs non colinéaires, alors *le plan vectoriel engendrée par a et b* est Vect $\{a, b\}$.
De plus, on a Vect $\{a, b\} = \{\alpha \cdot a + \beta \cdot b \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2\}$.

I.4. Somme de deux sous-espaces vectoriels.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Définition 7. On appelle *somme* de F et G l'ensemble noté $F + G$ et défini par :

$$F + G = \{x + y \mid x \in F \text{ et } y \in G\}.$$

Proposition 7. On a : $F + G = \text{Vect}\ (F \cup G)$.
Autrement-dit, $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant F et G.

Exemple 7. Dans $E = \mathbb{R}^3$, posons $F = \text{Vect}\ \{(1, 0, -1)\}$ et $G = \text{Vect}\ \{(0, 1, -1)\}$. Leur somme, $F + G$, est l'ensemble des vecteurs u de la forme :

$$u = x \cdot (1, 0, -1) + y \cdot (0, 1, -1) = (\quad , \quad , \quad), \quad \text{avec} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ainsi, $F + G =$

I.5. Somme directe. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Proposition 8. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Les affirmations suivantes sont équivalentes :
1. Pour tout $(y, z) \in F \times G$ et $(y', z') \in F \times G$: $y + z = y' + z' \Rightarrow (y = y' \text{ et } z = z')$.
2. $F \cap G = \{0\}$.
Lorsque ces propriétés équivalentes sont vérifiées, on dit que F et G sont *en somme directe*. Leur somme n'est alors plus notée $F + G$ mais $F \oplus G$.

Remarque 2. Le premier point de la proposition signifie que tout vecteur de la somme $F + G$ se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Remarque 3. L'inclusion $\{0\} \subset F \cap G$ étant toujours vérifiée, pour prouver $F \cap G = \{0\}$, il suffit de prouver $F \cap G \subset \{0\}$.

Définition 8. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits *supplémentaires* de E si :
$$E = F \oplus G.$$
Autrement-dit, F et G sont *supplémentaires* de E si tout vecteur de E se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exemple 8. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, Vect (1) et Vect (i) sont supplémentaires.

Remarque 4. En pratique comment montrer que F et G sont supplémentaires de E ?
- Dans les cas simples, on pourra montrer que $E = F + G$ et que $F \cap G = \{0\}$.
- Sinon, on montrera par analyse-synthèse, que tout vecteur de E se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

On rappellera plus loin que la notion de dimension est un outil qui peut s'avérer efficace pour prouver que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

Exercice 6. Montrer que Vect $\{(1,0)\}$ et Vect $\{(1,1)\}$ sont deux sev supplémentaires de $\mathbb{R}^2$.

⚠ L'exemple et l'exercice précédent montrent que Vect $\{(1,0)\}$ n'admet pas un unique supplémentaire.

Exercice 7. Montrer que L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

I.6. Somme de p sous-espaces vectoriels.

Soit un entier $p \geqslant 2$ et $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

Définition 9. On appelle *somme* de $F_1, \dots, F_p$ l'ensemble noté $F_1 + \cdots + F_p$ ou $\sum_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i$ et défini par :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i = \{x_1 + \cdots + x_p \mid \forall i \in [\![1, p]\!],\ x_i \in F_i\}.$$

Proposition 9. On a : $\sum_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i = \text{Vect}\,(F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_p)$.

Autrement-dit, $\sum_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant F_i pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

Proposition 10. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout $x \in \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i$, il existe un unique $p-$uplet, $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \prod_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i$ tel que :

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p.$$

2. Pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \prod_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i$, on a :

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_p = 0_E) \ \Rightarrow\ (x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0_E).$$

Lorsque ces propriétés équivalentes sont vérifiées, on dit que les sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont *en somme directe*. Leur somme est alors notée $F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$ ou $\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i$.

Exemple 9. Dans $\mathbb{R}^3$, Vect $\{(1,0,0)\}$, Vect $\{(0,1,0)\}$ et Vect $\{(0,0,1)\}$ sont en somme directe.

Exercice 8. Soit F_1, F_2, F_3 trois sous-espaces vectoriels de E. A-t-on équivalence entre F_1, F_2, F_3 sont en somme directe, et F_1, F_2, F_3 sont en somme directe deux à deux ?

⚠ Dans le cas où $p \geqslant 3$, une somme directe ne se caractérise donc pas en utilisant l'intersection.

II. Familles de vecteurs.

II.1. Familles génératrices.

Définition 10. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$.
On dit que $(e_1, \dots, e_n)$ est une *famille génératrice de E*, si $E = \text{Vect}\,\{e_1, \dots, e_n\}$, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E,\ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i \cdot e_i.$$

Dans ce cas, on pourra aussi dire que $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une *partie génératrice de E*.
On dira aussi que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ (ou la partie $\{e_1, \dots, e_n\}$) *engendre E*.

Remarque 5. Toute famille obtenue en permutant les éléments d'une famille génératrice de E est encore une famille génératrice de E.

Proposition 11. Toute famille obtenue en ajoutant un nombre fini d'éléments à une famille génératrice de E est encore une famille génératrice de E.
On dit que toute *sur-famille* d'une famille génératrice de E, est encore une famille génératrice de E.

Dans ce qui précède, on a seulement défini la notion de génératrice pour des familles ou parties finies.
On peut généraliser cette notion pour des familles ou des parties infinies :

Définition 11. Une famille (quelconque) $\{e_i \mid i \in I\}$ de E est dite *génératrice de E*, si :
$E = \text{Vect}\,\{e_i \mid i \in I\}$.
Une partie (quelconque) A de E est dite *génératrice de E*, si $E = \text{Vect}\,A$.

Exemple 10. La famille est une famille génératrice infinie de $\mathbb{K}[X]$.
Autrement-dit : $\mathbb{K}[X] =$

Exercice 9. Montrer que $(1, j)$ est une famille génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Proposition 12. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E, si, et seulement si,

$$E = \text{Vect}\ e_1 + \cdots + \text{Vect}\ e_n.$$

II.2. Familles libres.

Définition 12. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$.
- On dit que $(e_1, \dots, e_n)$ est une *famille libre de E*, ou que les vecteurs $e_1, \dots, e_n$, sont *linéairement indépendants* si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\quad \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i \cdot e_i = 0_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}.$$

- Dans le cas contraire, on dit que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une *famille liée*, ou que les vecteurs $e_1, \dots, e_n$, sont *linéairement dépendants*.

Remarque 6.
- Toute famille contenant 0_E est liée.
- Toute famille obtenue en permutant les éléments d'une famille libre est encore une famille libre.
- Une famille constituée de n vecteurs (avec $n \geqslant 2$) est liée si, et seulement si, l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
- Une famille (x) constituée d'un seul vecteur est libre si, et seulement si, $x \neq 0$. En effet :

Le théorème suivant permet de comprendre l'utilité d'une famille libre :

Théorème 1. Une famille $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ est libre si, et seulement si, pour tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ et tout $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$:
$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i \cdot e_i = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \beta_i \cdot e_i \quad \Rightarrow \quad \forall i \in [\![1, n]\!],\ \alpha_i = \beta_i.$$

Remarque 7. Ainsi, lorsqu'un vecteur se décompose comme combinaison linéaire des vecteurs d'une famille libre, alors cette décomposition est unique. Ce qui permet par exemple... "d'identifier" les coefficients.

Définition 13. On dit que deux vecteurs x et y de E sont *colinéaires* si :
$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, x = \lambda \cdot y \quad \text{ou} \quad y = \lambda \cdot x.$$

Proposition 13. Une famille (x, y) de E est libre, si, et seulement si, x et y ne sont pas colinéaires.

Exemple 11. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, les vecteurs 1 et i ne sont pas colinéaires, alors qu'ils le sont dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Exercice 10. On vient de voir qu'une famille constituée de 2 vecteurs est libre si, et seulement si, ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Peut-on en déduire qu'une famille de n vecteurs est libre si, et seulement si, ses vecteurs deux à deux sont non colinéaires ?

Proposition 14. Toute *sous famille* d'une famille libre, est encore une famille libre.
Par contraposée, toute *sur-famille* d'une famille liée, est liée.

Proposition 15. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E, et x un élément de E. Alors, la famille $(e_1, \dots, e_n, x)$ est liée si, et seulement si, x est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \dots, e_n$.

Proposition 16. Si $(P_1, \dots, P_n)$ est une famille de polynômes non nuls et, tous de degré différent, alors la famille $(P_1, \dots, P_n)$ est libre.
Une telle famille est dite *échelonnée en degrés*.

Démonstration.

□

Comme dans le cas des familles génératrices, nous devons maintenant étendre la notion de familles libres au cas de familles infinies :

Définition 14. Une famille infinie d'éléments de E est dite *libre* si toutes ses sous-familles finies sont libres. Elle sera dite *liée* si elle possède au moins une sous-famille finie liée.

Exemple 12. La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre (infinie) de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 17. La famille $(e_1,\dots,e_n)$ est libre, si, et seulement si, les sous-espaces vectoriels Vect $e_1,\dots,$ Vect e_n sont en somme directe.

II.3. Bases.

Définition 15. On appelle *base* de E toute famille d'éléments de E, à la fois libre et génératrice de E.

Théorème 2. Soit $n\in\mathbb{N}$ et soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)\in E^n$.
La famille $\mathcal{B}$ est une base de E si, et seulement si, pour tout vecteur x de E, il existe un unique $n-$uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que :

$$x=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda_i\cdot e_i.$$

Le $n-$uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ est appelé *coordonnées* de x dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple 13.
- La famille $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ où $e_1=(1,0,0,\dots,0)$, $e_2=(0,1,0,\dots,0)$, $\dots$ $e_n=(0,0,\dots,0,1)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée *base canonique* de $\mathbb{K}^n$.
- La famille $(1,X,\dots,X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée *base canonique* de $\mathbb{K}[X]$.

⚠ Soit $x=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$. Les coordonnées de x dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ sont $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.

Proposition 18. La famille $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, si, et seulement si,

$$E=\text{Vect } e_1\oplus\cdots\oplus\text{Vect } e_n.$$

Proposition 19. Soit $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$. L'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i \end{array} \qquad \text{est :}$$

- injective si, et seulement si, $(e_1, \dots, e_n)$ est
- surjective si, et seulement si, $(e_1, \dots, e_n)$ est
- bijective si, et seulement si, $(e_1, \dots, e_n)$ est

III. Applications linéaires.

III.1. Généralités.

Définition 16. Une application f de E dans F est appelée *application linéaire* si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2,\ f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y),$$

ce qui équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \forall (x,y) \in E^2, \quad f(x+y) & = & f(x) + f(y) \\ \forall (\alpha,x) \in \mathbb{K} \times E, \quad f(\alpha \cdot x) & = & \alpha \cdot f(x). \end{array} \right.$$

On dira que :
- f est un *isomorphisme de E dans F*, si f est une application linéaire bijective de E dans F,
- f est un *endomorphisme de E*, si f est une application linéaire de E dans E,
- f est un *automorphisme de E*, si f est un endomorphisme de E bijectif.

⚠ Une application linéaire est donc, en particulier, un morphisme du groupe $(E,+)$ dans le groupe $(F,+)$.

Exemple 14. L'application dérivation

$$\begin{array}{rccc} D : & \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & f'. \end{array}$$

est une application linéaire.

Exemple 15. L'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (2x+3y, x-2y). \end{array}$$

est un endomorphisme de $\mathbb{K}^2$.

Définition 17. On appelle *forme linéaire* sur E, toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemples 16.

- Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, l'application
$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x,y) & \longmapsto & ax+by. \end{array}$$
est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^2$.
- En notant, E l'espace vectoriel des suites réelles convergentes (c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$), l'application
$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \lim\limits_n u_n. \end{array}$$
est une forme linéaire sur E.
- Si a et b sont deux réels avec $a \leqslant b$, alors l'application
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([a,b]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \end{array}$$
est une forme linéaire sur $\mathcal{C}([a,b])$.

III.2. Noyau et image d'une application linéaire.

Proposition 20. Soit f une application linéaire de E dans F.
- Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.
- Si F' est un sous-espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

Rappel. $f(E') =$ $f^{-1}(F') =$.

Démonstration.

□

Définition 18. Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle :
- *noyau* de f, le sous-espace vectoriel de E, noté $\operatorname{Ker} f$ et défini par :
$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\},$$
- *image* de f, le sous-espace vectoriel de F, noté $\operatorname{Im} f$ et défini par :
$$\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}.$$

Remarque 8. Ker f et Im f sont bien des sous-espaces vectoriels , respectivement de E et de F, d'après la proposition précédente.

Remarque importante. Par définition de la surjectivité, une application linéaire f, de E dans F, est surjective, si, et seulement si, Im $f = F$.

Théorème 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. f est injective,

2. Ker $f = \{0_E\}$,

3. $\forall x \in E,\ f(x) = 0_F \ \Rightarrow\ x = 0_E$.

Exemples 17.

1. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\} = \text{Ker } f,$ où f est la forme linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y+z. \end{array}$$

2. Si a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I, alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $a(t)y' + b(t)y = 0$ est le noyau de l'application linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(I) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I) \\ y & \longmapsto & ay' + by. \end{array}$$

III.3. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$.

Proposition 21.

1. L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(E,F),+,\cdot)$.

2. En particulier, si f et g sont deux applications linéaires de E dans F, et si $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$, alors : $\alpha\cdot f + \beta\cdot g$ est une application linéaire de E dans F.

III.4. Composition d'applications linéaires.

Proposition 22.

1. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

2. Si f est un isomorphisme de E dans F (i.e. si f est une application linéaire bijective de E dans F), alors f^{-1} est une application linéaire.

Démonstration. Le premier point est une conséquence évidente de la définition. Montrons le point 2.

□

III.5. Le cas particulier des endomorphismes.

Proposition 23. $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.

Proposition 24. L'ensemble $\mathcal{L}(E)^\times$ des éléments inversibles de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est l'ensemble des automorphismes de E (i.e. des endomorphismes bijectifs de E).
Cet ensemble est appelé le *groupe linéaire* de E et noté $\mathrm{GL}(E)$.

Démonstration.

□

Proposition 25. $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe.

Démonstration. On a déjà vu que dans n'importe quel anneau $(A, +, \times)$, $(A^\times, \times)$ est un groupe.
Comme $\mathrm{GL}(E) = \mathcal{L}(E)^\times$, on obtient que $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe. □

Comme dans n'importe quel anneau, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ et $r \in \mathbb{N}$ on définit u^r, et on a : $u^0 = \mathrm{Id}_E$.

Remarque 10. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, on pourra définir l'endomorphisme $P(u)$. Par exemple, si $P = X^2 + 3X - 2$, on aura :

$$P(u) =$$

III.6. Applications linéaires et familles finies de vecteurs.

Proposition 26. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E, et f et g deux applications linéaires de E dans F, alors :

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = g(e_i).$$

Démonstration.

□

Théorème 4. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille quelconque de vecteurs de F. Il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = f_i.$$

Remarque 11. Ce théorème dit qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de E.

⚠ On notera qu'il est donc très simple de définir une application linéaire. Alors que définir un morphisme de groupes est souvent compliqué.

Exercice 11. Déterminer l'unique forme linéaire f de $\mathbb{R}^2$ telle que $f((1,0)) = 3$ et $f((0,1)) = 2$.

Proposition 27. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. La famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

2. f est surjective $\Leftrightarrow$ $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F.

Démonstration.

□

Proposition 28. Soit $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est liée, alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est liée.

2. Par contraposée, si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre, alors $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

3. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, et si f est injective, alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre.

Démonstration.

□

Proposition 29. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f est injective si, et seulement si, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille

2. f est surjective si, et seulement si, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille

3. f est bijective si, et seulement si, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une

Démonstration.

□

III.7. Détermination d'une application linéaire.

Le théorème suivant généralise le théorème 6 page 7 :

Théorème 5. Soit $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$.
Il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f|_{E_i} = u_i.$$

Démonstration.

□

Remarque 12. On pourrait facilement déduire le théorème 6 de ce théorème 7.

IV. Projections et symétries vectorielles.

IV.1. Projections vectorielles.

Définition 19. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
L'application p de E dans E qui, à tout élément x de E associe l'unique $y \in F$ tel que $x = y + z$, avec $z \in G$, est appelée la *projection sur F parallèlement à G* :

$$\begin{array}{rccccc} p : & E & = & F \oplus G & \longrightarrow & E \\ & x & = & y + z & \longmapsto & y. \end{array}$$

Une telle application est aussi appelée *projecteur*.

Exemple 18. Id_E est la projection sur parallèlement à
$0_{\mathcal{L}(E)}$ est la projection sur parallèlement à

Proposition 30. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
La projection p sur F parallèlement à G est un endomorphisme de E, et on a :

$$\mathrm{Ker}\ p = G \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\ p = F = \{x \in E \mid p(x) = x\}.$$

Autrement-dit, F est l'ensemble des points fixes (ou vecteurs invariants) de p, ou encore :

$$F = \mathrm{Ker}\ (p - \mathrm{Id}_E).$$

Théorème 6. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur, si, et seulement si, $p^2 = p$.

⚠ p^2 désigne l'endomorphisme $p \circ p$.

Idée de la démonstration.

□

IV.2. Symétries vectorielles.

Définition 20. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
On appelle *symétrie par rapport à F parallèlement à G*, l'application s de E dans E qui, à tout élément x de E s'écrivant $x = y + z$, avec $(y, z) \in F \times G$, associe le vecteur $y - z$:

$$\begin{array}{rccccc} s : & E & = & F \oplus G & \longrightarrow & E \\ & x & = & y + z & \longmapsto & y - z. \end{array}$$

Remarque 13. Si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, et p la projection sur F parallèlement à G, alors :

Proposition 31.

1. Une symétrie est un endomorphisme de E.
2. Si s est un endomorphisme, alors : s est une symétrie si, et seulement si, s est involutive ($s^2 = \mathrm{Id}_E$).
3. Si s est une symétrie, alors, c'est la symétrie par rapport à Ker $(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à Ker $(s + \mathrm{Id}_E)$.

⚠ s^2 désigne l'endomorphisme $s \circ s$.

Exemple 19. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, l'application $z \mapsto \overline{z}$ est la symétrie par rapport à et parallèlement à .

Méthode.
Comment montre-t-on que p est un projecteur ou que s est une symétrie ?
Comment détermine-t-on alors F et G ?

Exercice 12. En notant $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{I}(\mathbb{R})$, respectivement, l'ensemble des fonctions paires et celui des fonctions impaires, que dire des application suivantes :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & (x \mapsto f(-x)) \end{array} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \left(x \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}\right) \end{array}.$$

IV.3. Hyperplans et formes linéaires.

Nous allons définir la notion d'hyperplan d'un espace vectoriel E. Intuitivement, il s'agit des plus grands sous-espaces vectoriels de E (autres que E lui-même).

Définition 21. On appelle *hyperplan vectoriel* de E, tout sous-espace vectoriel admettant pour supplémentaire au moins une droite vectorielle.
Autrement-dit, un hyperplan vectoriel de E est un sous-espace vectoriel H de E tel qu'il existe au moins une droite vectorielle D telle que : $E = H \oplus D$.

Remarque 14. La plupart du temps, on dira plus simplement *hyperplan*.

Théorème 7. Une partie H de E est un hyperplan de E, si, et seulement si, il existe au moins une forme linéaire non nulle f de E telle que : $H = \text{Ker } f$.

Proposition 32. Soit H est un hyperplan de E. Pour toute droite vectorielle D qui n'est pas incluse dans H, on a : $E = H \oplus D$.

Exercice 13. Soit F un sev de E contenant un hyperplan H. Montrer que $F = H$ ou $F = E$.

L'exercice précédent prouve bien ce que nous avons dit plus haut : les hyperplans sont les sous-espaces vectoriels maximaux de E (autres que E).

V. Espaces vectoriels de dimension finie.

V.1. Théorème de la base incomplète, théorème de la base extraite.

Définition 22. Un espace vectoriel est dit de *dimension finie* s'il possède une famille génératrice finie. Dans la cas contraire, on dit qu'il est de *dimension infinie*.

Exemple 20.
- Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est de dimension finie puisqu'il est engendré par
- $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. En effet, leur base canonique est une famille génératrice finie.

Exercice 14. Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie.

⚠ Exhiber une famille génératrice infinie ne prouve rien !

Théorème 8. Soit E un espace vectoriel. Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E, et soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E telle que :

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{G}.$$

Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}.$$

Remarque 15. Le théorème ci-dessus est le théorème central sur lequel repose la notion de dimension finie. Il est souvent appelé injustement théorème de la base incomplète.

Corollaire 1. Théorème de la base extraite.
Soit E un espace vectoriel. De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base de E.

Corollaire 2. Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

Corollaire 3. Théorème de la base incomplète.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre finie de E peut être complétée en une base de E.

Remarque 16. On verra plus tard dans le cours, que dans un espace vectoriel de dimension finie, toute famille libre est nécessairement finie.

Exercice 15. On considère la famille $\mathcal{L} = ((X-1),(X-1)^2)$. La compléter en une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

V.2. Dimension d'un espace vectoriel.

Théorème 9. Si $\mathcal{L}$ est une famille libre d'un espace vectoriel E, et si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E, alors :
$$\text{Card } \mathcal{L} \leqslant \text{Card } \mathcal{G}.$$

Remarque 17. On déduit de ce théorème, que dans un espace vectoriel de dimension finie, toute famille libre est nécessairement finie.

Théorème 10. Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même nombre n d'éléments. L'entier n est appelé *dimension* de E (sur $\mathbb{K}$), et est noté $\dim E$.

Démonstration.

□

⚠ Nous avons déjà vu que chaque $\mathbb{C}$-espace vectoriel est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La dimension dépend alors du corps de base ! Ainsi, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 (car (1) en est une base), mais un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 (car $(1, i)$ en est une base).
Mais lorsqu'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, il n'y a alors pas de confusion possible.

Exemples 21.
- $\dim\{0\} =$, puisqu'une base de $\{0\}$ est . C'est d'ailleurs sa seule base.
- Sur tout corps $\mathbb{K}$ on a : $\dim \mathbb{K}^n =$ et $\dim \mathbb{K}_n[X] =$

Remarque 18. La notion de dimension permet d'affirmer que :
- un espace vectoriel est une droite vectorielle si, et seulement si, sa dimension est égale à 1,
- un espace vectoriel est un plan vectoriel si, et seulement si, sa dimension est égale à 2.

Proposition 33. Si E est un espace vectoriel de dimension n, alors :
- toute famille libre a au plus n éléments,
- toute famille génératrice de E a au moins n éléments.

Démonstration.

□

Théorème 11. Caractérisation des bases en dimension finie.
Soit E est un espace vectoriel de dimension n, et $\mathcal{B}$ une famille de E. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{B}$ est une base de E,

2. $\mathcal{B}$ est une famille libre de E à n éléments,

3. $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E à n éléments.

Méthode.
En pratique, pour démontrer qu'une famille d'un espace vectoriel de dimension n en est une base, il suffira de démontrer qu'elle est libre et qu'elle contient n vecteurs. Il n'est alors pas utile de prouver qu'elle est génératrice.

Lorsque $\mathcal{B}$ est une famille libre de E à n éléments, on dit qu'elle est *libre maximale*.

Lorsque $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E à n éléments, on dit qu'elle est *génératrice minimale*.

Exemple 22. Deux vecteurs non colinéaires d'un plan vectoriel en forment une base.

Exercice 16. Montrer que $(1, 1+X, 1+X+X^2, 1+X+X^2+X^3)$ est une base de $\mathbb{K}_3[X]$.

Proposition 34. (Dimension d'un produit cartésien).
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_m)$ où $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Alors, la famille :

$$\mathcal{B} =$$

est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E \times F$. Par conséquent,

$$\dim E \times F =$$

Remarque 19. On démontre par récurrence sur n que si $E_1, \dots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors :

$$\dim \prod_{i=1}^{n} E_i =$$

En particulier, on retrouve le fait que : $\dim \mathbb{K}^n =$

Proposition 35. Caractérisation des espaces vectoriels de dimension infinie.
Un espace vectoriel E est de dimension infinie si, et seulement si, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier n, la famille $(u_0, \dots, u_n)$ est libre.

⚠ On retrouve le fait que l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie. En effet, la suite

V.3. Sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 12. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Alors, tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie, et

$$\dim F \leqslant \dim E.$$

De plus, $F = E$ si, et seulement si, $\dim F = \dim E$.

Méthode.
Dans les faits, on utilisera ce théorème dans un espace vectoriel quelconque E. Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G sont égaux on pourra prouver que $F \subset G$ et que F et G sont de dimension finie et de même dimension.

V.4. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Proposition 36. Tout sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie possède au moins un supplémentaire.

Idée de la démonstration.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n et F un sous-espace vectoriel de E. Montrons que F admet un supplémentaire dans E.

D'après le théorème précédent, F est aussi de dimension finie, et en notant $p = \dim F$ on a : $p \leqslant n$.

Comme F est de dimension finie, F possède une base. Notons $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F.

La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F, donc en particulier c'est une famille libre de F, donc une famille libre de E.

Or, E est un espace vectoriel de dimension finie. Donc, le théorème de la base incomplète, assure que l'on peut compléter la famille libre $(e_1, \dots, e_p)$ en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E.

Posons $G = \text{Vect}\,\{e_{p+1}, \dots, e_n\}$. On montre alors que $E = F \oplus G$. □

V.5. Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels.

Théorème 13.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de G, alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.
On en déduit que E est de dimension finie et que :

$$\dim E = \dim F + \dim G \quad \text{i.e.} \quad \dim F \oplus G = \dim F + \dim G.$$

La base $(e_1, \dots, e_n)$ de E est dite *adaptée* à la décomposition $E = F \oplus G$.

Démonstration.

□

Remarque importante. Dans la partie précédente, on a vu que tout sous-espace F d'un espace vectoriel E de dimension finie possède au moins un supplémentaire G. On vient maintenant de voir que les supplémentaires de F ont tous pour dimension : $\dim E - \dim F$.

Corollaire 4. (Formule de Grassmann).
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

Corollaire 5. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Les affirmations suivantes sont équivalentes :
1. $\dim E = \dim F + \dim G$ et $F \cap G = \{0\}$
2. $\dim E = \dim F + \dim G$ et $E = F + G$
3. $E = F \oplus G$.

V.6. Rang d'une famille finie de vecteurs.

Définition 23. Si $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E, on appelle *rang* de $\mathcal{F}$ la dimension de Vect $\mathcal{F}$. On le note rg $\mathcal{F}$:

$$\text{rg } \mathcal{F} = \dim(\text{Vect } \mathcal{F}).$$

⚠ Cette définition a bien un sens puisque Vect $\mathcal{F}$ est, par définition, engendrée par $\mathcal{F}$ qui est une famille finie de vecteurs. Ainsi, Vect $\mathcal{F}$ est bien de dimension finie.

Proposition 37. Soit $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E. Alors :
1. rg $\mathcal{F} \leqslant p$
2. rg $\mathcal{F} = p$ si, et seulement si, $\mathcal{F}$ est libre.

Démonstration.

□

Proposition 38. Soit $\mathcal{F}$ une famille vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie égale à n. Alors :
3. rg $\mathcal{F} \leqslant n$
4. rg $\mathcal{F} = n$ si, et seulement si, $\mathcal{F}$ est génératrice.

Démonstration.

□

V.7. Applications linéaires et dimension finie.

Définition 24. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et u une application linéaire de E dans F. On dit que u est de *rang fini*, si $\mathrm{Im}u$ est de dimension finie.
Dans ce cas, on appelle rang de u la dimension de $\mathrm{Im}u$: $\mathrm{rg}\ u = \dim(\mathrm{Im}u)$.

Si E possède une famille génératrice finie $\mathcal{F}$, alors u est de rang fini et : $\mathrm{rg}\ u = \mathrm{rg}\ (u(\mathcal{F}))$.

Proposition 39. Si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et : $\mathrm{rg}\ u \leqslant \dim E$.
De plus $\mathrm{rg}\ u = \dim E$ si, et seulement si, u est

Démonstration.

□

Proposition 40. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Si F est de dimension finie, alors u est de rang fini et : $\mathrm{rg}\ u \leqslant \dim F$.
De plus $\mathrm{rg}\ u = \dim F$ si, et seulement si, u est

Démonstration.

□

V.8. Dimension et isomorphismes.

Proposition 41. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels tel que E soit de dimension finie. Alors :

$$E \text{ et } F \text{ sont isomorphes } \Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ est de dimension finie} \\ \dim E = \dim F. \end{cases}$$

Démonstration.

□

Corollaire 6. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est de dimension n si, et seulement si, il est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Remarque 21. Ce corollaire est d'une importance cruciale car il permet de faire la classification, à isomorphisme près, des espaces vectoriels de dimension finie par leur dimension.

Corollaire 7. Soit E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels . Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$.
1. Si u est un surjective et si v est de rang fini, alors $v \circ u$ est de rang fini et :

$$\text{rg } (v \circ u) = \text{rg } v.$$

2. Si v est un injective et si u est de rang fini, alors $v \circ u$ est de rang fini et :

$$\text{rg } (v \circ u) = \text{rg } u.$$

On peut résumer cette proposition en disant que le rang d'une application linéaire est invariant par composition par un isomorphisme.

Théorème 14. Théorème du rang.
Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et si E_0 est un supplémentaire de Ker u dans E, alors u induit un isomorphisme de E_0 dans Imu.
En particulier, si E est de dimension finie, on a :

$$\dim E = \text{rg } u + \dim \text{Ker } u = \dim \text{Im} u + \dim \text{Ker } u.$$

Démonstration.

□

Exercice 17. Déterminer le noyau et l'image, de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (y, x-y+z)$.

V.9. Caractérisation des isomorphismes.

Théorème 15. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie tels que $\underline{\dim E = \dim F}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :
1. u est injective,
2. u est surjective,
3. u est bijective.

Remarque 22. Ce théorème s'applique en particulier dans le cas où $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E un espace vectoriel de dimension finie.

Démonstration.

□

Corollaire 8. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. On a :

$$u \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad u \text{ est surjective} \quad \Leftrightarrow \quad u \text{ est bijective.}$$

⚠ Le corollaire précédent est faux en dimension infinie, comme le montrent les deux endomorphismes suivants :

Application au polynôme d'interpolation de Lagrange.

Exercice 18. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts, et soit l'application :

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ & & P & \mapsto & (P(a_0), \dots, P(a_n)). \end{array}$$

1. Montrer que ϕ est linéaire.
2. Montrer que ϕ est un isomorphisme.

De cet exercice, on déduit le théorème suivant :

Théorème 16. Si $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ sont des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$ et si $(y_0, y_1, \dots, y_n)$ sont des éléments quelconques de $\mathbb{K}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = y_i.$$

Ce polynôme P, appelé *polynôme d'interpolation de Lagrange*, et s'exprime ainsi :

Définition 25. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on pose

$$L_i = \prod_{1 \leqslant j \leqslant n, j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

Ces n polynômes sont appelés les *polynômes de Lagrange* associés à $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Exercice 19. Si P est un polynôme, on note $(*)$ la condition : $P(1) = 4, \quad P(2) = 15, \quad$ et $\quad P(-2) = 7$.
1. Déterminer un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant la condition $(*)$.
2. Déterminer l'ensemble des polynômes vérifiant la condition $(*)$.

Remarque 23. Le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à n points n'est pas forcément de degré $n-1$, mais est de degré au plus $n-1$.
En effet, le polynôme de Lagrange vérifiant $P(-1)=-1, P(0)=2$, et $P(1)=5$ est :

Proposition 42. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, on a :

$$P = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} P(a_i) L_i.$$

On en déduit que la famille $(L_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Démonstration.

□

V.10. Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$.

Théorème 17. Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et : $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$.

Corollaire 9. Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie et :

$$\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2.$$

Exemple 23. $\dim \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) =$ On peut d'ailleurs en déduire que $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est isomorphe à .

V.11. Hyperplans et formes linéaires en dimension finie.

Dans cette sous-partie E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. L'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ sera noté E^*.

Définition 26. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note e_i^*, l'unique forme linéaire de E vérifiant :

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}.$$

Remarque 24. Cette définition de e_i^* a bien un sens d'après

Proposition 43. Pour tout $x \in E$, si x a pour coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, alors on a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ e_i^*(x) = x_i.$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la forme linéaire e_i^* est ainsi appelée la *i-ème application coordonnée*.

Démonstration.

□

Proposition 44. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*.
La base $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est appelée la *base duale* de $(e_1, \dots, e_n)$.

Démonstration.

□

Corollaire 10. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Pour toute $f \in E^*$, il existe un unique uplet $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot e_i^*.$$

Ainsi, pour tout $x \in E$: $\quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

Démonstration.

□

Remarque 25.
L'application définie par $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot e_i^*$ est l'unique forme linéaire telle que :

En effet :

Toute forme linéaire f peut donc s'écrire :

Exercice 20. Soit f la forme linéaire définie par son expression dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 + x_2. \end{array}$$

Montrer que $((1,1),(1,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, puis déterminer l'expression de f dans cette base.

Corollaire 11. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Une partie H de E est un hyperplan de E si, et seulement si, elle admet dans $\mathcal{B}$ une équation de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0,$$

où $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Autrement-dit, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$ on a :

$$x \in H \ \Leftrightarrow \ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0.$$

Théorème 18. Soit H un sev de E. Alors, H est un hyperplan de E si, et seulement si, $\dim H = n - 1$.

Exemples 24. Les hyperplans d'un espace de dimension 2 sont
Les hyperplans d'un espace de dimension 3 sont

Exemples 25.
- Dans un espace de dimension 2, l'équation d'une droite vectorielle est de la forme : $ax + by = 0$.
- Dans un espace de dimension 3, l'équation d'un plan vectoriel est de la forme : $ax + by + cz = 0$.

Théorème 19. Soit n et m deux entiers non nuls et E un espace de dimension n.
1. L'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n - m$.
2. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans.

Démonstration.

□