– TD 7 : Révisions d'algèbre linéaire –

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel et u en endomorphisme de E admettant X^2+3X+2 pour polynôme annulateur i.e. vérifiant :

$$u^2+3u+2\mathrm{Id}_E=0.$$

1. On pose $v=u+2\mathrm{Id}_E$, calculer v^2.

2. En déduire l'existence de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G de E tels que les restrictions $u_{|F}$ et $u_{|G}$ sont des homothéties.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie non nulle.

1. Soit H et H' deux hyperplans de E. Montrer que H et H' possèdent un sous-espace vectoriel supplémentaire commun.

2. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E vérifiant $\dim F=\dim G$. Montrer que F et G possèdent un sous-espace vectoriel supplémentaire commun.

Exercice 3. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et G un sous-espace vectoriel de E. On définit l'ensemble $\mathcal{H}$ par :

$$\mathcal{H}=\{u\in\mathcal{L}(E,F)\mid G\subset\mathrm{Ker}\ u\}.$$

Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ et calculer sa dimension.

Exercice 4. On sait que la valeur de la dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dépend du choix du corps $\mathbb{K}$. Le but de cet exercice est de montrer que le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension infinie.

On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de tous les nombres premiers dans l'ordre croissant : $p_1=2, p_2=3\ldots$

Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la famille $(\ln(p_1),\ldots,\ln(p_n))$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, puis conclure.

Exercice 5. Soit u l'application définie par : $\forall P\in\mathbb{K}[X], u(P)=XP$.

Soit $F=\{P\in\mathbb{K}[X]\ ,\ P(0)=0\}$.

On pourra, sans démonstration, affirmer que u est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que u est injective et que $\mathrm{Im}(u)=F$.

2. Que peut-on en déduire concernant la dimension de $\mathbb{K}[X]$?

3. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{K}[X]$.

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $v\in\mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X],\mathbb{K}_{n+1}[X])$ définie pour tout $P\in\mathbb{K}_n[X]$ par $v(P)=u(P)$.

4. Déterminer une base puis la dimension de $F\cap\mathbb{K}_{n+1}[X]$.

5. Montrer que v est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $F\cap\mathbb{K}_{n+1}[X]$.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :

$$E = \mathrm{Im}u + \mathrm{Im}v = \mathrm{Ker}u + \mathrm{Ker}v.$$

Prouver que ces sommes sont directes.

Exercice 7. Soit $(a_1, \dots, a_n)$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts, et soit $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les polynômes de Lagrange associés. Déterminer une expression simple du polynôme

$$P = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} L_j.$$

Exercice 8. Soit $(a_1, \dots, a_n)$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts, et soit $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les polynômes de Lagrange associés.

1. Montrer que $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

2. Déterminer sa base duale.

Exercice 9. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soit f et g deux formes linéaires non-nulles définies sur E.

1. Démontrer qu'il existe $u \in E$ tel que $f(u) \neq 0$ et $g(u) \neq 0$.

2. On suppose qu'il existe p formes linéaires $f_1, \dots, f_p$ telles que :

$$\forall x \in E, (f_1(x) = \dots = f_p(x) = 0) \Rightarrow x = 0.$$

Montrer que $\dim(E) \leqslant p$.

Exercice 10. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie égale à n. Donner une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ de noyau F et d'image G.

Exercice 11. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est stable par u si :

$$\forall x \in F,\ u(x) \in F.$$

Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les endomorphismes :

$$u_\sigma : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}),$$

pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $x \in E$ tel que $\varphi(x) = 0$ pour tout $\varphi \in E^*$. Que peut-on dire de x ?

2. Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^*. Montrer qu'il existe une unique base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ soit la base duale de $\mathcal{B}$.

Exercice 13. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de directions respectives F et G, et contenant respectivement les points a et b. Montrer que :

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing \iff b - a \in F \cap G.$$