– Programme de colle n° 7 : du 16 au 20/11 –

Cette semaine, les questions de cours portent sur le chapitre 7 : Révisions d'algèbre linéaire.

Les exercices portent sur le chapitre 6 : Topologie (Partie II). En particulier, la compacité et la continuité des applications linéaires.

En second exercice, on pourra poser un exercice de révision d'algèbre linéaire de MPSI (sans matrice de préférence).

Chapitre 7- Révisions d'algèbre linéaire
Applications linéaires. Dimension finie.

Caractérisation des sommes directes dans le cas de $p \geqslant 2$ sous-espaces vectoriels. ✎

Existence d'un supplémentaire en dimension finie.

Soit $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$. Il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que : ✎

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f|_{E_i} = u_i.$$

(une preuve dans le cas $n = 2$ suffit).

⚠ Bien connaître les propriétés des projecteurs, et des symétries vectorielles.

L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ des fonctions paires et l'ensemble $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ des fonctions impaires sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ en utilisant la symétrie $s : f \mapsto (x \mapsto f(-x))$. ✎

Définition et propriétés d'un hyperplan (en dimension quelconque).

Si H est un hyperplan de E et F un sous-espace vectoriel tel que $H \subset F$, alors $H = F$ ou $F = E$. ✎

Théorème de la base incomplète. Théorème de la base extraite.

Dimension d'un produit cartésien d'espaces vectoriels de dimension finie.

Familles libres, génératrices, bases.

$\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie. Toute famille de $\mathbb{K}[X]$ échelonnée en degrés est libre. ✎

Caractérisation des bases en dimension finie (notion de famille libre maximale et de famille génératrice minimale).

Dimension d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels. ✎
Formule de Grassmann (voir au verso). ✎

Formule de Grassmann.
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

Démonstration. Le but est de se ramener à une somme directe.

Considérons G' un supplémentaire de $F \cap G$ dans G i.e. : $G = (F \cap G) \oplus G'$.

Montrons que $F + G = F \oplus G'$.

- Montrons que $F \cap G' \subset \{0\}$.

Soit $x \in F \cap G'$. Alors $x \in G'$ or $G' \subset G$, donc $x \in G$. Donc $x \in F \cap G$.
Or, $x \in G'$ et ont sait que $(F \cap G)$ et G' sont en somme directe. Donc $x = 0$.

- Comme G' est un sous-espace vectoriel de G, on a $G' \subset G$ et donc $F + G' \subset F + G$. Il reste à montrer l'inclusion inverse.

Soit $x \in F + G$. Par définition, on peut écrire $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.
Comme $G = (F \cap G) + G'$, on peut écrire $z = z_1 + z_2$ avec $z_1 \in F \cap G$ et $z_2 \in G'$.
Ainsi, on a : $x = \underbrace{(y + z_1)}_{\in F} + \underbrace{z_2}_{\in G'}$.
Donc : $x \in F + G'$.

- On a montré que $F + G = F \oplus G'$. Donc $\boxed{\dim(F+G) = \dim(F \oplus G') = \dim F + \dim G'}$.

Or, $G = (F \cap G) \oplus G'$, donc $\dim G = \dim(F \cap G) + \dim G'$ et donc : $\boxed{\dim G' = \dim G - \dim(F \cap G)}$. □