– Chapitre 8 : Matrices (rappels) –

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera un sous-corps de $\mathbb{C}$.

I. Matrice d'une application linéaire.

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension respective p et n.
Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_2 = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition 1. On appelle matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$ telle que pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, la j-ème colonne est constituée des coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_2$.
Ainsi, en notant $(a_{i,j})_{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$, on a :

$$\forall j \in [\![1, p]\!],\ u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i.$$

⚠ Cette formule utilise les colonnes de la matrice.

Exercice 1. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par $u((x, y, z)) = (x + y, 2y - z)$. Écrire la matrice de u relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ notées $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

Exercice 2. Écrire la matrice de u relativement à $\mathcal{B}_1$ et la base $\mathcal{B}'_2 = ((1, 0), (1, 1))$ de $\mathbb{R}^2$.

Soit $x \in E$ et soit $(x_1, \dots, x_p)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_1$.

$$u(x) = u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \quad =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Proposition 1. Soit $x \in E$ et soit $(x_1, \dots, x_p)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_1$.
En notant $y = u(x)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_2$, on obtient :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j.$$

⚠ Cette formule utilise les lignes de la matrice.

Exercice 3. On reprend les deux exercices de la page précédente. Soit le vecteur $x = (3, -4, 5)$.
1. À l'aide de la matrice obtenue à l'exercice 2, déterminer les coordonnées de $u(x)$ dans la base $\mathcal{B}_2$.
2. À l'aide de la matrice obtenue à l'exercice 3, déterminer les coordonnées de $u(x)$ dans la base $\mathcal{B}_2'$.
3. Vérifier que les deux résultats obtenues sont cohérents.

Conclusion.
- La j-ème colonne de la matrice $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$ est formée des coordonnées de l'image du j-ème vecteur de $\mathcal{B}_1$ dans $\mathcal{B}_2$.
- La i-ème ligne de la matrice $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$ permet d'obtenir la i-ème coordonnée de $u(x)$ dans $\mathcal{B}_2$, en fonction des coordonnées de x dans $\mathcal{B}_1$.

Remarque 1. Cas particulier des endomorphismes.
Dans le cas d' un endomorphisme u de E, on choisira la plupart du temps qu'une seule base $\mathcal{B}$ de E pour écrire la matrice. On notera $M_{\mathcal{B}}(u)$ au lieu de $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$.

Exemple 1. Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de E.
$M_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) =$

II. L'application $u \mapsto M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$.

Théorème 1. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension respective p et n et de base respective $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. L'application :

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ & & u & \mapsto & M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels . En particulier si $(u,v) \in \mathcal{L}(E,F)^2$ et si $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\begin{array}{rcl} M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u+v) & = & M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u) + M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(v) \\ M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\alpha \cdot u) & = & \alpha \cdot M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u). \end{array}$$

Remarque 2. Le fait que ϕ soit bijective se traduit en disant qu'une fois fixées une base $\mathcal{B}_1$ de E et $\mathcal{B}_2$ de F, se donner une application linéaire de E dans F revient à se donner une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Autrement-dit, une application linéaire de E dans F est entièrement déterminée par sa matrice relativement aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

Remarque 3. Dans le cas où $E = F$ (ce qui implique aussi $n = p$), l'application ϕ précédente est un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Posons $E = \mathbb{K}^p$, $F = \mathbb{K}^n$, et $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ leur base canonique respective.
L'unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dont A est la matrice relativement aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est appelée *l'application linéaire canoniquement associée à A.*

III. Composition d'applications linéaires. Produit matriciel.

Le but ici est de définir le produit de deux matrices.

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension respective q, p et n.
Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_q)$ une base de E, $\mathcal{B}_2 = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F, et $\mathcal{B}_3 = (g_1, \dots, g_n)$ de G.
Soit $v \in \mathcal{L}(F,G)$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
Posons $\quad A = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(v) = (a_{i,k})_{(i,k)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}, \quad$ et $\quad B = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u) = (b_{k,j})_{(k,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}$.
Déterminons la matrice $\quad C = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(v \circ u) = (c_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]}$.

Soit $j \in [\![1, q]\!]$. $(v \circ u)(e_j) = $ $=$

$=$

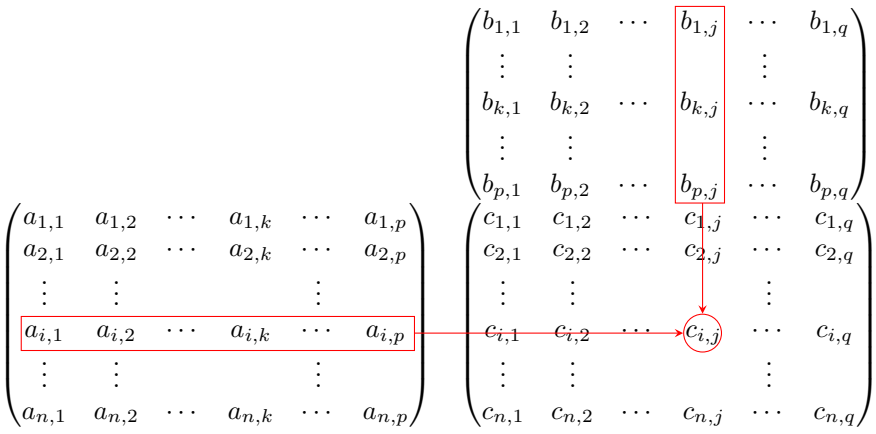
$=$

$=$

On a donc : $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\ b_{k,j}$. Ce résultat va nous inspirer la définition du produit matriciel.

Définition 3. Soit $A = (a_{i,k})_{(i,k)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $B = (b_{k,j})_{(k,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On définit le produit matriciel $C = A \times B$ comme étant la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par :
$C = (c_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]}$ où :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\ b_{k,j} = a_{i,1}\ b_{1,j} + a_{i,2}\ b_{2,j} + \cdots + a_{i,p}\ b_{p,j}.$$



⚠ Bien noter que l'on a défini le produit matriciel $A \times B$ où le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. Sinon, ce produit n'aura aucun sens !

$$\underset{n\times p}{A} \times \underset{p\times q}{B} = \underset{n\times q}{C}.$$

Théorème 2. Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et de base respective $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ de G. Si $v \in \mathcal{L}(F, G)$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors :

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(v \circ u) = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(v) \times M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u).$$

Démonstration. Voir les calculs de la page précédente. □

Remarque 4. Le produit matriciel précédent est bien licite car les deux matrices ont respectivement $\dim F$ colonnes et $\dim F$ lignes.

On vient de définir le produit matriciel de sorte qu'il permette d'obtenir facilement la matrice d'une composée $v \circ u$ connaissant la matrice de v et de u. Mais le plus intéressant est qu'il va nous permettre d'obtenir les coordonnées de $u(x)$ à partir de la matrice de u et des coordonnées de x :

Théorème 3. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et de base respective $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et posons : $A = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$. Soit $x \in E$.
Si X est la matrice colonne constituée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}_1$, alors la matrice colonne Y constituée des coordonnées de $u(x)$ dans la base $\mathcal{B}_2$ est donnée par :

$$Y = A \times X.$$

Exercice 4. Déterminer l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarque 5. Plus généralement, si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors l'application canoniquement associée à A est l'application linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto & A \times X \end{array}.$$

Cette remarque nécessite d'écrire les vecteurs de $\mathbb{K}^p$ sous forme d'une matrice colonne.

En particulier, si L est une matrice ligne à n colonnes, la forme linéaire canoniquement associée à L est :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K} \\ X & \mapsto & L \times X \end{array}.$$

Cette écriture nécessite d'identifier les matrices de tailles 1×1 avec les éléments de $\mathbb{K}$.
Par exemple, la forme linéaire canoniquement associée à $L = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3,x_4) & \mapsto & \end{array}$$

Proposition 2. Le produit matriciel est bilinéaire i.e. qu'il est :
- linéaire par rapport à la première variable : si $(A, A') \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et λ et λ' sont deux scalaires quelconques, on a :

$$(\lambda A + \lambda' A')B = \lambda AB + \lambda' A'B$$

- linéaire par rapport à la deuxième variable : si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(B, B') \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2$, et λ et λ' sont deux scalaires quelconques, on a :

$$A(\lambda B + \lambda' B') = \lambda AB + \lambda' AB'$$

Proposition 3. Le produit matriciel est associatif.

⚠ Le produit matriciel n'est pas commutatif. Pire que ça, le produit AB peut exister sans que le produit BA existe.

Dans la partie suivante, on va s'intéresser au cas particulier des matrices carrées de tailles n, où ce problème ne se rencontre plus : si A et B sont deux matrices carrées de taille n, alors les produits AB et BA existent tous les deux.

IV. Cas particulier du produit de matrices carrées.

Proposition 4. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.

Remarque 6. Cet anneau n'est jamais commutatif, si $n \geqslant 2$:

Ce contre-exemple se généralise pour tout $n \geqslant 2$.

Remarque 7. On voit aussi que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau qui n'est pas intègre.

Remarque 8. Comme dans n'importe quel anneau, on dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *inversible* s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n.$$

Dans ce cas, la matrice B est unique, appelée inverse de A et notée A^{-1}.

⚠ Cette notion de matrice inversible, n'a évidemment de sens que pour des matrices carrées !

Définition 4. On appelle *groupe linéaire* (de degré n) l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 9. On rappelle, que si $(A, +\times)$ est un anneau alors, l'ensemble $A^\times$ des éléments inversibles, muni de $\times$, est groupe. Ainsi $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe.

Théorème 4. Soit E et F deux espaces vectoriels de même dimension n, et soit $\mathcal{B}_1$ une base de E et $\mathcal{B}_2$ une base de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors, u est bijective si, et seulement si, $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$ est inversible. On a alors :

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)^{-1} =$$

Corollaire 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si, et seulement si, le système $Y = AX$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est de Cramer pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exercice 5. Étudier l'inversibilité de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

V. Puissances d'une matrice carrée.

⚠ Le produit $A \times A$, que l'on notera évidemment A^2, existe si, et seulement si, le nombre de colonnes de A est égal à son nombre de lignes i.e. si, et seulement si, A est une matrice carrée.
Comme dans n'importe quel anneau, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $r \in \mathbb{N}$ on définit A^r, et on a : $A^0 = I_n$.

Remarque 10. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, on pourra définir la matrice $P(A)$. Par exemple, si $P = X^2 + 3X - 2$, on aura :

$$P(A) =$$

Théorème 5.
Pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ vérifiant $AB = BA$, et pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a :

$$(A+B)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} A^k B^{r-k} = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} A^{r-k} B^k \qquad \text{Formule du binôme}$$

$$A^r - B^r = (A-B)\sum_{k=0}^{r-1} A^k B^{r-1-k} = (A-B)\sum_{k=0}^{r-1} A^{r-1-k} B^k.$$

Démonstration. Vrai dans n'importe quel anneau. □

Proposition 5. Si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et si $r \in \mathbb{N}$, alors : $A^r = \mathrm{diag}(\lambda_1^r, \dots, \lambda_n^r)$.

VI. Matrice d'une famille finie de vecteurs.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Définition 5. Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille (quelconque) de vecteurs de E.
On appelle matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ ou $M_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$ telle que pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, la j-ème colonne est constituée des coordonnées de x_j dans la base $\mathcal{B}$.
Ainsi, en notant $(a_{i,j})_{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$, on a :

$$\forall j \in [\![1,p]\!],\ x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

Remarque importante.

- Si $x \in E$, alors $M_{\mathcal{B}}(x)$ est la matrice colonne constituée des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
- Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases respectivement de E dans F, alors :

$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u) =$ et $M_{\mathcal{B}_2}(u(x)) =$

Proposition 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de n vecteurs de E est une base de E si, et seulement si, $M_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est inversible.

Démonstration.

□

VII. Matrices de passage.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E, appelées respectivement l'ancienne et la nouvelle base.

Définition 6. On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, la matrice notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et définie par $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. Ainsi, en notant $(a_{i,j})_{[\![1,n]\!]^2} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, on a :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

Remarque 12. Autrement-dit, $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est la matrice carrée $n \times n$ dont la j-ème colonne est constituée des coordonnées dans $\mathcal{B}$ du j-ème vecteur de $\mathcal{B}'$. On en déduit que :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E).$$

En effet :

Proposition 7. Soit $x \in E$. Soit X et X' les matrices colonnes constituées de coordonnées de x respectivement dans $\mathcal{B}$ et dans $\mathcal{B}'$. On a alors : $X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X'$.

Démonstration.

□

Exercice 6. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit $\mathcal{B}' = ((1,2),(3,4))$. Exprimer les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ en fonction de ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$.

Remarque 13. En pratique, on aura en général une première base $\mathcal{B}$ (la base canonique par exemple), puis une seconde base $\mathcal{B}'$ dont les vecteurs seront définis à partir de ceux de $\mathcal{B}$. On pourra donc facilement écrire la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. En revanche, on ne pourra pas obtenir directement la matrice $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

Conclusion. La matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ permet :
- par ses colonnes, d'exprimer les coordonnées de chaque vecteur de la base $\mathcal{B}'$, dans la base $\mathcal{B}$,
- par ses lignes, d'obtenir les coordonnées dans $\mathcal{B}$ d'un vecteur en fonction de ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$.

Proposition 8. La matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} =$

Démonstration.

□

VIII. Effet d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire.

Théorème 6. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$ deux bases de E, et $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}'_2$ deux bases de F.
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
En posant $M = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$ et $M' = M_{\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}'_2}(u)$, on a :

$$\boxed{M = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}'_2} \cdot M' \cdot P^{-1}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'_1}}.$$

Démonstration.

□

Cas particulier des endomorphismes.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
Soit $M = M_{\mathcal{B}}(u)$ et $M' = M_{\mathcal{B}'}(u)$. Alors :

$$\boxed{M = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot M' \cdot P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}}.$$

Un des objectifs du programme de deuxième année est la réduction des matrices et des endomorphismes. Étant donné une matrice carrée n, il s'agira, quand c'est possible, de déterminer une matrice diagonale D et une matrice de passage P telle $M = PDP^{-1}$.

IX. Rang d'une matrice.

Définition 7. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et soit u l'application linéaire canoniquement associée à A (on rappelle que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$). On définit :
- le noyau de A comme étant le noyau de u ; on le note Ker A
- l'image de A comme étant l'image de u ; on le note Im A

Remarque importante.
1. Les lignes de A fournissent un système d'équations de Ker A. En effet, soit $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, et posons X la matrice colonne constituée de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{K}^p$ (i.e. $X = {}^t x$). On a:

$x \in \text{Ker } A \Leftrightarrow u(x) = 0 \Leftrightarrow A \cdot X = 0 \Leftrightarrow$

2. L'image de A est engendrée par les vecteurs colonnes de A. En effet, en notant $(e_1, \dots, e_p)$ le base canonique de $\mathbb{K}^p$, on sait que Im u (i.e. Im A) est engendrée par $(u(e_1), \dots, u(e_p))$.

Exercice 7. Déterminer le noyau et l'image de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Définition 8. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et soit u l'application linéaire canoniquement associée à A (on rappelle que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$). On définit le rang de A comme étant le rang de u.
Autrement-dit, le rang de A est le rang de la famille des p vecteurs colonnes de A (ce sont des vecteurs de $\mathbb{K}^n$).
On le note rg A.

Exemple 2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, alors rg $A =$

Pour des matrices carrées, le rang donne une caractérisation de l'inversibilité :

Proposition 9. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors : $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \text{rg } A = n$.

Démonstration.

□

Revenons au cas de matrices de taille quelconque. On va voir le lien entre les diverses notions de rang : rang d'une famille, rang d'une application linéaire et rang d'une matrice.

Proposition 10.
1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Si $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs, alors :
$$\text{rg } \mathcal{F} = \text{rg } (M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})).$$

2. Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, alors :
$$\text{rg } (M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)) = \text{rg } u.$$

Proposition 11. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Pour tout $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), \text{rg } (P \cdot A) = \text{rg } A$,
- Pour tout $Q \in \text{GL}_p(\mathbb{K}), \text{rg } (A \cdot Q) = \text{rg } A$.

Autrement-dit, la multiplication par une matrice inversible ne modifie pas le rang d'une matrice.

Notations.
Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, pour tout entier $r \leqslant \min\{n,p\}$, on définit la matrice J_r par $J_r = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ où :
$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leqslant r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Dans $\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{K})$: $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dans $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$: $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Nous allons voir que ces matrices sont relativement intéressantes ; notamment car leur rang est très facile à déterminer : $\boxed{\text{rg } J_r = r}$.

Définition 9. Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites *équivalentes* s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que :
$$A = P \cdot B \cdot Q.$$

Remarque 15. Nous avons vu que la multiplication par une matrice inversible ne modifie pas le rang d'une matrice. De ce fait, si A et B sont équivalentes, alors rg A = rg B.

Remarque 16. Si E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_1'$ sont deux bases de E, et $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_2'$ deux bases de F, et si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ nous avons vu que :
$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u) = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2'} \cdot M_{\mathcal{B}_1',\mathcal{B}_2'}(u) \cdot P^{-1}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1'}.$$
Comme les matrices de passage $P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2'}$ et $P^{-1}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1'}$ sont inversibles, on obtient que :
$$\boxed{M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u) \text{ et } M_{\mathcal{B}_1',\mathcal{B}_2'}(u) \text{ sont équivalentes}}.$$

Théorème 7. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors rg $A = r$ si, et seulement si, les matrices A et J_r sont équivalentes.

Corollaire 2. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors rg ${}^tA$ = rg A.

X. Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme.

Définition 10. Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de A l'élément de $\mathbb{K}$ noté $\operatorname{Tr} A$ et défini comme la somme de ses éléments diagonaux :

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i,i}.$$

Et on appelle trace et on note Tr, l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, qui à une matrice associe sa trace.

Définition 11. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.
On dit que A et B sont *semblables* s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PBP^{-1}$.

Remarque 17. Si deux matrices sont semblables, alors elles sont équivalentes. En particulier, deux matrices semblables ont donc même rang.

⚠ La notion de matrices équivalentes concerne deux éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors que la notion de matrices semblables concerne seulement deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 12.
1. L'application Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. La trace est invariante par transposition : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{Tr} A^{\mathsf{T}} = \operatorname{Tr} A$.

Proposition 13. Si $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ alors $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.
En particulier, la trace est invariante par similitude, i.e. que deux matrices semblables ont même trace.

Démonstration.

□

⚠ Ne pas confondre les notions de matrices semblables et de matrices équivalentes. Si deux matrices sont semblables, alors elles sont équivalentes, mais la réciproque est fausse :

⚠ Si deux matrices sont semblables alors elles ont même trace, mais la réciproque est fausse :

L'invariance par similitude est une propriété importante, car permet de définir la trace d'un endomorphisme (en dimension finie).

Proposition 14. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{B}$ une base de E, alors $\operatorname{Tr} M_{\mathcal{B}}(u)$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$, ce qui permet de définir la trace de u, que l'on note $\operatorname{Tr} u$, comme la trace de la matrice de u dans dans une base quelconque $\mathcal{B}$ de E.

Démonstration. En effet, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors $M_{\mathcal{B}}(u)$ et $M_{\mathcal{B}'}(u)$ sont semblables, d'où $\operatorname{Tr} M_{\mathcal{B}}(u) = \operatorname{Tr} M_{\mathcal{B}'}(u)$. □

Exercice 8. Déterminer la trace de la rotation u de $\mathbb{R}^2$ d'angle θ.

Exercice 9. Soit F et G deux sous-espaces vectoriel de E, soit p le projection sur F parallèlement à G, et soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Déterminer, $\operatorname{Tr} p$ et $\operatorname{Tr} s$ en fonction de $\dim F$ et $\dim G$. Déterminer $\operatorname{Tr} p$ en fonction de $\operatorname{rg} p$.

XI. Déterminant d'une matrice carrée.

XI.1. Définition du déterminant d'une matrice carrée.

Définition 12. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle déterminant de A, le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
On le note $\det(A)$.

Si $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ alors on note le déterminant de A :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Par simple application de la formule sommatoire du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base, on obtient :

Proposition 15. (Formule sommatoire du déterminant d'une matrice).
Si $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ alors, on a : $\det A = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$.

Cette formule sommatoire, d'apparence si sympathique, est finalement simple d'utilisation dans las cas $n = 2$ et $n = 3$:

Exemple 3.
$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} =$

Cette formule peut se retrouver très facilement, à l'aide de la *méthode de Sarrus* :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

⚠ Cette méthode de Sarrus ne fonctionne que pour $n = 2$ et $n = 3$. Et dans les faits, même pour $n = 3$, on utilisera d'autres techniques !

Proposition 16. Si $D = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ est une matrice diagonale, alors :
$$\det D = \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Démonstration. Dans la formule sommatoire, tous les termes sont nuls sauf dans le cas où $\sigma = \mathrm{Id}$. □

Théorème 8. Soit $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille à n vecteurs de E et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E, et $A = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$. Alors :
$$\det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} = \det A \quad \text{i.e.} \quad \det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} = \det M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule sommatoire. □

Théorème 9. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E, et $A = M_{\mathcal{B}}(f)$. Alors :
$$\det f = \det A \quad \text{i.e.} \quad \det f = \det M_{\mathcal{B}}(f).$$

Démonstration.

□

Remarque importante. La matrice $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ dépend évidemment du choix de la base $\mathcal{B}$.
Mais l'égalité $\det f = \det M_{\mathcal{B}}(f)$ prouve que $\det M_{\mathcal{B}}(f)$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$!
Nous reviendrons sur cette indépendance à la remarque 20.

Les propriétés du déterminant d'un endomorphisme, ont leur équivalent pour le déterminant d'une matrice carrée :

Proposition 17. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$.

2. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

3. A est inversible si, et seulement si, $\det A \neq 0$. Et dans ce cas, on a :

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

Démonstration.

□

Remarque 19. On en déduit que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$.

Remarque 20. Retour sur la remarque importante qui précède. Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E, et si $A' = M_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors,

Proposition 18. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors : $\det A^{\mathsf{T}} = \det A$.

Démonstration. Appliquons la formule sommatoire :

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma^{-1}(1)} a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \quad \text{car} \quad \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} = \{1, \ldots, n\}.\end{aligned}$$

Or, $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$. En effet, $\varepsilon(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \varepsilon(\mathrm{Id}) = 1$ et $\varepsilon(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\sigma^{-1})$. D'où :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{1,\sigma^{-1}(1)} a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}.$$

Or, lorsque σ décrit $\mathcal{S}_n$, σ^{-1} décrit également $\mathcal{S}_n$. On peut donc procéder au changement d'indice $\tau = \sigma^{-1}$, ce qui donne :

$$\det A = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} a_{2,\tau(2)} \cdots a_{n,\tau(n)}.$$

On reconnaît la formule sommatoire appliquée à la matrice A^{T}, et ainsi $\det A = \det A^{\mathsf{T}}$. □

Remarque importante. Le déterminant des matrices est une forme n-linéaire alternée des colonnes. L'égalité précédente assure que c'est aussi une forme n-linéaire alternée des lignes.

XI.2. Calcul des déterminants.

Le calcul du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base, ou du déterminant d'un endomorphisme, peut se ramener au déterminant d'une matrice carrée. Dans cette section, nous ne parlerons donc plus que de déterminant de matrice carrée, que nous pourrons simplement appeler déterminant.

Le déterminant des matrices étant une forme n-linéaire alternée des colonnes et des lignes, on en déduit :

Proposition 19.

- Un déterminant qui a une ligne de 0 ou une colonne de 0 est nul.
- Un déterminant qui a deux lignes ou deux colonnes identiques est nul.
- L'échange de deux lignes multiplie le déterminant par -1.
- L'échange de deux colonnes multiplie le déterminant par -1.
- Un déterminant qui a une ligne qui est combinaison linéaire de ses autres lignes est nul.
- Un déterminant qui a une colonne qui est combinaison linéaire de ses autres colonnes est nul.
- La valeur d'un déterminant est inchangée si l'on ajoute à une ligne, une combinaison linéaire de ses autres lignes.
- La valeur d'un déterminant est inchangée si l'on ajoute à une colonne, une combinaison linéaire de ses autres colonnes.
- Si l'on multiplie une ligne (resp. une colonne) par λ, alors le déterminant est multiplié par λ.
- Si l'on multiplie tout les coefficients d'un déterminant par λ, alors le déterminant est multiplié par λ^n.

Le but est maintenant d'utiliser les transformations de proposition 17 pour faire apparaître un maximum de 0. Soit pour montrer que le déterminant est nul, soit pour pouvoir utiliser le résultat suivant :

Proposition 20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. S'il existe $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ telle que :

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{1,1} & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right), \qquad \text{alors} \qquad \boxed{\det A = a_{1,1} \cdot \det A'}.$$

Démonstration.

Par permutation de lignes et de colonnes, on peut se ramener à démontrer que si:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & A' & & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \hline * & \cdots & * & a_{n,n} \end{array}\right), \qquad \text{alors} \qquad \det A = a_{n,n} \cdot \det A'.$$

$\det A = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$.

Or, $a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} = 0$ si $\sigma(n) \neq n$. D'où :

$$\begin{aligned}\det A = \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{S}_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} &= a_{n,n} \cdot \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{S}_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n-1),n-1} \\ &= a_{n,n} \cdot \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n-1),n-1}\end{aligned}$$

En effet, se donner $\sigma \in \mathcal{S}_n$ en imposant la condition $\sigma(n) = n$ équivaut à se donner $\sigma \in \mathcal{S}_{n-1}$.

On obtient finalement : $\det A = a_{n,n} \cdot \det A'$. □

On en déduit un corollaire, qui généralise le résultat déjà rencontré pour les matrices diagonales :

Corollaire 3. Le déterminant d'une matrice triangulaire est égale au produit des coefficients diagonaux

Démonstration.

□

Exercice 10. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Définition 13. Si $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$et soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On appelle :

- *mineur* de $a_{i,j}$, le déterminant noté $\Delta_{i,j}$, de la matrice extraite de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A,
- *cofacteur* de $a_{i,j}$, le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

Pour la matrice : $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ on a : $\Delta_{2,3} =$

Théorème 10. (Développement suivant une colonne).
Si $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}.$$

Développons par rapport à la 1ère colonne :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}^{+} & a_{1,2}^{-} & a_{1,3}^{+} \\ a_{2,1}^{-} & a_{2,2}^{+} & a_{2,3}^{-} \\ a_{3,1}^{+} & a_{3,2}^{-} & a_{3,3}^{+} \end{vmatrix} =$$

Théorème 11. (Développement suivant une ligne).
Si $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}.$$

XI.3. Comatrice.

Définition 14. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle *comatrice* de A, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée des cofacteurs de A.
On la note $\mathrm{Com}A$.

Proposition 21. $A \cdot \big(\mathrm{Com}A\big)^{\mathsf{T}} = \big(\mathrm{Com}A\big)^{\mathsf{T}} \cdot A = (\det A)\mathrm{I}_n$.

Corollaire 4. Si A est inversible, alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\big(\mathrm{Com}A\big)^{\mathsf{T}}.$$

Remarque 22. La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$. Et dans ce cas :

$$A^{-1} =$$