– Programme de colle n° 1 : du 16 au 20/09 –

Les étapes de la colle.

1. La colle commence par une question de cours simple qui correspond à énoncer une définition, une proposition, ou un théorème.

2. Ensuite, c'est le tour d'une démonstration parmi celles indiquées par le symbole ✎
⚠ Évidemment l'énoncé de la proposition ou du théorème à démontrer doit être parfaitement maîtrisé.

3. La colle se poursuivra par un ou plusieurs exercices (de difficulté croissante) mettant en jeu les notions du programme. À chaque fois qu'une définition ou une proposition du cours semblera mal maîtrisée, l'interrogateur en demandera l'énoncé précis.

⚠ Les étudiants doivent maîtriser le cours afin que les questions de cours et la démonstration ne prennent pas plus de 15 minutes en tout.

⚠ Les étudiants viennent en colle avec leur cours de maths pour pouvoir s'y référer si le colleur le leur demande.

La notation.

Les notes de colle sont comptabilisées dans la moyenne. Le barème est le suivant :

- $n \in [\![0, 5]\!]$, si aucune des 3 étapes de la colle n'a donné satisfaction,
- $n \in [\![6, 8]\!]$, dans le cas où l'étudiant a su répondre correctement à certaines questions de cours ou à certaines questions de l'exercice, mais en laissant l'impression que le cours n'est pas suffisamment su,
- $n \in [\![9, 20]\!]$, si la question de cours, la démonstration et le cours en général sont sus.

Cette semaine, les questions de cours portent sur les chapitres 1, 2 et 3.

Les exercices portent sur les chapitres 1 et 2 uniquement.

Chapitre 1 - Analyse asymptotique.

Savoir manipuler les équivalents notamment en utilisant : $f \underset{a}{\sim} g \quad \Leftrightarrow \quad f - g \underset{a}{=} o(g)$.

Composition par ln dans un équivalent lorsque la fonction a une limite $\ell \neq 1$. ✎

⚠ Formule de Stirling.

⚠ Connaître parfaitement les DL usuels.

Opérations sur les DL : somme, produit, composition, quotient.

Développement asymptotique.

Exemples : savoir déterminer un développement asymptotique de $\frac{1}{\operatorname{sh} x}$ au voisinage de 0 ; de $\frac{x^2-1}{x^2+x+1}$ au voisinage de $+\infty$.

Développement asymptotique de suites définies implicitement.

Chapitre 2 - Séries numériques.

Séries de référence : séries exponentielles, séries géométriques, géométriques dérivée première, géométriques dérivée seconde, séries de Riemann.

Théorèmes de comparaison des séries à terme général positif.

Critère de d'Alembert. ✎

Théorème des séries alternées (avec signe et majoration du reste). ✎

⚠ Théorème de comparaisons séries-intégrale + encadrement.

Application à l'étude des séries de Riemann.

Sommation des relations de comparaison (cas convergent avec les restes). ✎

Application : $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. ✎

Sommation des relations de comparaison (cas divergeant avec les sommes partielles).

Application : les théorèmes de Cesàro (pour une suite convergente ou une suite de limite $+\infty$). ✎

⚠ Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Applications : propriété algébrique de l'exponentielle complexe + somme de la série géométrique dérivée $1^{\text{ère}}$. ✎

Chapitre 3 - Structure de groupe.

I. Rappels sur les groupes.

Définition, exemples. Groupe produit. Notion de sous-groupe. Morphisme de groupes.

Soit f un morphisme de G dans G'. Si H est un sous-groupe de G, alors $f(H)$ est un sous-groupe de G' ; et si H' est un sous-groupe de G', alors $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G. ✎

Noyau et image d'un morphisme de groupes.

Caractérisation de l'injectivité d'un morphisme de groupes.

II. Sous-groupe engendré par une partie. Partie génératrice d'un groupe.

III. Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.

Une partie H de $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ si, et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$. ✎

IV. Groupe monogène, groupe cyclique.

V. Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe cyclique engendré par $\overline{1}$.

De plus, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, la classe $\overline{a}$ de a engendre le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ si, et seulement si, $a \wedge n = 1$. ✎

VI. Ordre d'un élément d'un groupe.

Soit $a \in G$ et soit φ l'application :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{Z} & \to & G \\ & & k & \mapsto & a^k. \end{array}$$

Savoir énoncer et démontrer tous les points qui suivent :

1. φ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(G, *)$,

2. $\mathrm{Im}(\varphi) = \langle a \rangle$,

3. a est un élément d'ordre fini si, et seulement si, φ est non injective.

Si a est d'ordre fini d :

1. $\mathrm{Ker}(\varphi) = d\,\mathbb{Z}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $a^n = e \Leftrightarrow d \mid n$.

3. Pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $n \equiv m\ [d] \ \Leftrightarrow\ a^n = a^m$.

4. $\langle a \rangle = \{e, a, \dots, a^{d-1}\}$, et les éléments de l'ensemble $\{e, a, \dots, a^{d-1}\}$ sont 2 à 2 distincts.