– Programme de colle n° 2 : du 23 au 27/09 –

Cette semaine, les questions de cours portent sur les chapitres 3 et 4.

Les exercices portent uniquement sur les séries numériques (chapitre 2) ; en particulier sur les développements asymptotiques de restes ou de sommes partielles.

Chapitre 3 - Structure de groupe.

cours uniquement

I. Rappels sur les groupes.

Définition, exemples. Groupe produit. Notion de sous-groupe. Morphisme de groupes.

Soit f un morphisme de G dans G'. Si H est un sous-groupe de G, alors $f(H)$ est un sous-groupe de G' ; et si H' est un sous-groupe de G', alors $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.

Noyau et image d'un morphisme de groupes.

Caractérisation de l'injectivité d'un morphisme de groupes.

II. Sous-groupe engendré par une partie. Partie génératrice d'un groupe.

III. Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.

Une partie H de $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ si, et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$.

IV. Groupe monogène, groupe cyclique.

V. Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe cyclique engendré par $\overline{1}$.

De plus, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, la classe $\overline{a}$ de a engendre le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ si, et seulement si, $a \wedge n = 1$.

VI. Ordre d'un élément d'un groupe.

Soit $a \in G$ et soit φ l'application :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{Z} & \rightarrow & G \\ & & k & \mapsto & a^k. \end{array}$$

Savoir énoncer et démontrer tous les points qui suivent : ✎

1. φ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(G, *)$,

2. $\mathrm{Im}(\varphi) = \langle a \rangle$,

3. a est un élément d'ordre fini si, et seulement si, φ est non injective.

Si a est d'ordre fini d : ✎

1. $\mathrm{Ker}(\varphi) = d\,\mathbb{Z}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $a^n = e \Leftrightarrow d \mid n$.

3. Pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $n \equiv m\ [d] \ \Leftrightarrow\ a^n = a^m$.

4. $\langle a \rangle = \{e, a, \ldots, a^{d-1}\}$, et les éléments de l'ensemble $\{e, a, \ldots, a^{d-1}\}$ sont 2 à 2 distincts.

Théorème de Lagrange : l'ordre d'un élément d'un groupe fini divise l'ordre du groupe. ✎

VII. Structure des groupes monogènes.

Théorème de structure des groupes monogènes. ✎

Générateurs de $(\mathbb{U}_n, \times)$. Notion de racine *primitive* n-ème de l'unité.

VIII. Groupe symétrique.

VIII.1. Permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

VIII.2. Décomposition d'une permutation.

VIII.3. Signature d'une permutation.

Chapitre 4 - Topologie des espaces vectoriels normés (Partie I)

cours uniquement

⚠ Les définitions des notions ci-dessous doivent être parfaitement sues. Les étudiants doivent notamment connaître l'expression de chacune des normes évoquées ci-dessous.

I. Normes et espaces vectoriels normés.

I.1. Normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Connaître la définition de la norme produit et savoir prouver que c'est une norme. ✎

I.2. Boules fermées, boules ouvertes, sphères.

I.3. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.
Savoir prouver que la norme issue d'un produit scalaire est bien une norme. ✎

I.4. Normes usuelles de $\mathbb{K}^n$.

I.5. Parties, suites, fonctions bornées.

I.6. Normes sur les espaces usuels de fonctions.

a. Norme de la convergence uniforme.

b. Normes de la convergence en moyenne, de la convergence en moyenne quadratique.

II. Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé.

II.1. Suite convergente. Suite divergente.

II.2. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espace vectoriel normé.

Une suite (a_n) d'éléments de E converge, pour la norme produit, vers un élément a de E si, et seulement si, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la suite (a_n^k) converge vers a^k dans l'espace vectoriel normé (E_k, N_k). ✎