– Programme de colle n° 4 : du 07 au 11/10 –

Cette semaine, les questions de cours portent sur le chapitre 5 : Structure d'anneaux.
Les exercices portent uniquement sur le chapitre 4 : Topologie (Partie I).

Chapitre 4 - Topologie des espaces vectoriels normés (Partie I)

I. Normes et espaces vectoriels normés.

II. Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé.

III. Topologie d'un espace vectoriel normé.

IV. Comparaison de normes.

Chapitre 5 - Structure d'anneaux.

cours uniquement

I. Rappels sur les anneaux.

I.1. Notion d'intégrité.

I.2. Notion de sous-anneau.

I.3. Morphisme d'anneaux.

I.4. Groupe des inversibles d'un anneau.

On note $A^\times$ le groupe des inversibles d'un anneau A.

I.5. Corps.

II. Compléments sur les anneaux.

II.1. Produit fini d'anneaux.

II.2. Idéal d'un anneau commutatif.

<u>Bien connaître</u> la définition d'un idéal.

II.3. Idéal engendré par un élément.

II.4. Divisibilité dans un anneau commutatif intègre.

Lien entre divisibilité et inclusion des idéaux principaux : $a \mid b \Leftrightarrow bA \subset aA$.

II.5. Idéaux de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

$\mathbb{Z}$ est un anneau principal.
Bien savoir énoncer la définition du PGCD et du PPCM de $n \geqslant 2$ entiers relatifs en utilisant les idéaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

III. Anneaux $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$.

Caractérisation des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$. ✎
(n est premier) $\Leftrightarrow$ ($(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps) $\Leftrightarrow$ ($(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est intègre). ✎
Bien savoir énoncer les deux versions du théorème chinois : en termes d'isomorphisme d'anneaux et en termes de système de congruences.

IV. Indicatrice d'Euler φ.

Bien connaitre la définition et les différentes propriétés de l'indicatrice d'Euler.
Pour tout $n \geqslant 2$ on a : $\varphi(n) \leqslant n - 1$ avec égalité si, et seulement si, n est premier. ✎
En particulier : si n et m sont deux entiers naturels premiers entre eux, alors $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$. ✎
Théorème d'Euler et petit théorème de Fermat. ✎

V. Anneaux $\mathbb{K}[X]$.

V.1. Rappels sur les polynômes.

V.2. Idéaux de $\mathbb{K}[X]$.

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal. Notion de générateur normalisé d'un idéal. ✎

V.3. PGCD et le PPCM.

Bien savoir énoncer la définition du PGCD et du PPCM de $n \geqslant 2$ polynômes en utilisant les idéaux de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$.
Par définition, le PGCD et le PPCM sont normalisés (i.e. unitaires ou nuls).

V.4. Polynômes irréductibles.

Décomposition en produit de polynômes irréductibles.
Théorème de d'Alembert-Gauss. Notion de polynôme scindé.
Bien connaitre la définition d'un polynôme irréductible.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$. ✎

VI. Algèbres.