– Programme de colle n° 5 : du 14 au 18/10 –

Cette semaine, les questions de cours portent sur le chapitre 6 : Topologie (Partie II).
Les exercices portent sur le chapitre 5 : Structure d'anneaux.
En second exercice, on pourra poser à nouveau un exercice sur le chapitre 4 : Topologie (Partie I).

Chapitre 5 - Structure d'anneaux.

I. Rappels sur les anneaux.

II. Compléments sur les anneaux.

Produit fini d'anneaux.
Idéal d'un anneau commutatif. Idéal engendré par un élément.
Divisibilité dans un anneau commutatif intègre.
Idéaux de l'anneau $(\mathbb{Z},+,\times)$. PGCD et du PPCM de $n \geqslant 2$ entiers relatifs en utilisant les idéaux de $(\mathbb{Z},+,\times)$.

III. Anneaux $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$.

IV. Indicatrice d'Euler φ.

V. Anneaux $\mathbb{K}[X]$.

Idéaux de $\mathbb{K}[X]$. $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal. Notion de générateur normalisé d'un idéal.
PGCD et du PPCM de $n \geqslant 2$ polynômes en utilisant les idéaux de $(\mathbb{K}[X],+,\times)$. Par définition, ils sont normalisés (i.e. unitaires ou nuls).
Polynômes irréductibles. Théorème de d'Alembert-Gauss. Notion de polynôme scindé.

VI. Algèbres.

Chapitre 6 - Topologie (Partie II).

⚠ Cours uniquement - Ce chapitre n'est pas terminé.

I. Limite d'une application.

I.1. La notion de limite.

Caractérisation séquentielle de la limite. ✎

Proposition Soit a un point adhérent à A et $b \in F$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :
1. f tend vers un élément b de F en a.
2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in B(a,\eta) \cap A,\ \ f(x) \in B(b,\varepsilon)$.
3. Pour tout voisinage V de b, il existe un voisinage U de a tel que : $\forall x \in U \cap A,\ \ f(x) \in V$.
4. Pour tout voisinage V de b, il existe un voisinage U de a tel que : $f(U \cap A) \subset V$.
5. Pour tout voisinage V de b, $f^{-1}(V)$ est un voisinage relatif à A du point a.

I.2. Limite d'une composée. ✎

I.3. Limite d'une fonction à valeurs dans un produit fini d'espace vectoriel normé.

II. Continuité.

II.1. Continuité ponctuelle.

Proposition Soit a un point de A. Les affirmations suivantes sont équivalentes :
1. f est continue en a.
2. Pour tout voisinage V de $f(a)$, il existe un voisinage U de a tel que : $f(U \cap A) \subset V$.
3. Pour tout voisinage V de $f(a)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage relatif à A du point a.

II.2. Continuité globale.

Proposition ✎
Soit f une application de A dans F. Les affirmations suivantes sont équivalentes :
1. f est continue sur A,
2. Pour tout ouvert Y de F, $f^{-1}(Y)$ est un ouvert relatif de A,
3. Pour tout fermé Y de F, $f^{-1}(Y)$ est un fermé relatif de A.

II.3. Applications uniformément continues, applications lipschitziennes.

III. Applications linéaires continues.

III.1. Critère de continuité d'une application linéaire.

III.2. Norme subordonnée (ou norme d'opérateur).

Pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$, on a : $|||u||| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup\limits_{x \neq 0_E} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. ✎

On en déduit que pour tout $x \in E$: $\|u(x)\| \leqslant |||u||| \times \|x\|$.

⚠ Savoir calculer la norme subordonnée d'une application linéaire continue.

La norme subordonnée est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$, et elle est sous-multiplicative. ✎

Critère de continuité d'une application multilinéaire.

III.3. Adaptation aux matrices.

IV. Parties compactes d'un espace vectoriel normé.

Une partie compacte est fermée et bornée. Mais la réciproque est fausse. ✎

Tout fermé d'une partie compacte est compact. ✎

Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence. ✎

Tout produit cartésien de parties compactes est compact pour la norme produit.