– TD 6 : Topologie des espaces vectoriels normés (Partie II) –

Exercice 1. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers A et que $(A_k^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers B. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si, et seulement si, la série de terme général A^k converge.

Exercice 3. Montrer qu'un endomorphisme u d'un espace vectoriel normé E est continu si, et seulement si, la partie $\{x \in E \mid \|u(x)\| = 1\}$ est un fermé de E.

Exercice 4. Soit $f : A \to F$ une application continue. Montrer que si D est une partie dense de A alors, $f(D)$ est une partie dense de $f(A)$.

Exercice 5. Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Justifier l'existence de : $a = \inf H \cap \mathbb{R}_+^*$.

2. On suppose $a > 0$. Montrer que $a \in H$ puis que $H = a\mathbb{Z}$.

3. On suppose $a = 0$. Établir que H est dense dans $\mathbb{R}$.

4. Montrer que l'ensemble $\{\cos n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 6. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme produit. On note :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \quad \text{et} \quad B = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que A et B sont deux parties fermées de $\mathbb{R}^2$.

2. On note : $A + B = \{a + b \in \mathbb{R}^2 \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$. Montrer que $A + B$ n'est pas une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7. Soit F une partie fermée non vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie E. Montrer que, pour tout $x \in E$, la distance de x à F est atteinte en un certain élément $y_0 \in F$.

Exercice 8. On munit $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ de la norme ∞. Montrer que pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on a :

$$|||A||| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{1\leqslant j\leqslant p} |a_{i,j}|.$$

Exercice 9. Si A est une partie bornée et non vide de E. On appelle diamètre de A le nombre noté $\operatorname{diam}(A)$ et défini par : $\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid (x, y) \in A^2\}$.

1. Montrer que le diamètre de A est bien défini.

2. On suppose de plus A compact. Montrer qu'il existe $(a, b) \in A^2$ tel que $\operatorname{diam}(A) = d(a, b)$.

Exercice 10. Soit K une partie convexe compacte non vide d'un espace vectoriel normé E, et soit u un endomorphisme continu de E vérifiant $u(K) \subset K$. Soit $a \in K$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(a).$$

1. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $x \in K$ tel que $u(x) = x$.

2. Soit v un endomorphisme continu de E commutant avec u et vérifiant $v(K) \subset K$. Montrer que u et v possèdent dans K un point fixe commun.

Exercice 11. Soit $f : A \to F$ où A est une partie d'un espace vectoriel normé E et F un espace vectoriel normé. Soit a un point adhérent à A. On suppose que pour toute suite (a_n) qui converge vers a, $(f(a_n))$ converge. Montrer que f admet une limite en a.

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel normé et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de compacts de E. Montrer que leur intersection est un compact de E. Leur union est-elle nécessairement compacte ?

Exercice 13. Soit E un espace normé de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant \|x\|\,.$$

Le but de cet exercice est de montrer que les espaces Ker $(u - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires.

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}\ (u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que pour tout entier n, $u^n(a) - a = nx$.

2. Conclure.

Exercice 14. On considère $E = \mathcal{C}([0,1])$ que l'on munit de la norme $\|.\|_\infty$.
On considère $F = \mathcal{C}^1([0,1])$ que l'on munit de la norme : $\|f\|_F = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.
On définit l'application linéaire T de E dans F par : $\forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
Montrer que T est continue et déterminer sa norme subordonnée.

Exercice 15. On considère E l'espace vectoriel des suites bornées, que l'on munit de la norme $\|.\|_\infty$.
Pour toute suite bornée $(u_n)_n$ on définit la suite $(v_n)_n$ par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.
On définit l'endomorphisme T de E par $T(u) = v$.
Montrer que T est continue et déterminer sa norme subordonnée.

Exercice 16. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, que l'on munit de la norme $\|.\|_\infty$.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la forme linéaire φ de $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = P(\alpha)$.

1. Déterminer les valeurs de α pour que φ soit continue.

2. Dans ce cas, déterminer sa norme subordonnée.

Exercice 17. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle.

Exercice 18. Soit f une application de E dans E vérifiant : $\forall (x,y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.
Soit K une partie compacte de E telle que $f(K) \subset K$.
Pour $x \in \mathbb{K}$, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que x est une valeur d'adhérence de (x_n). En déduire que $f(K) = K$.

Exercice 19. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des projecteurs de E est une partie fermée de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit T une matrice triangulaire inversible.

1. Montrer que T peut être reliée à I_n par un chemin à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

2. En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 21. On souhaite montrer que les seules parties ouvertes et fermées d'un espace vectoriel normé E sont $\varnothing$ et E. On raisonne par l'absurde et on suppose l'existence d'une troisième partie A ouverte et fermée.

1. Montrer que l'application indicatrice de A, notée $\mathbb{1}_A$, est continue en tout point de E.

2. Conclure.