– TD 7 : Révisions d'algèbre linéaire –

Exercice 1. On sait que la valeur de la dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dépend du choix du corps $\mathbb{K}$. Le but de cet exercice est de montrer que le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension infinie.

On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de tous les nombres premiers dans l'ordre croissant : $p_1 = 2, p_2 = 3\dots$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(\ln(p_i), \dots, \ln(p_i))$ est libre.

Exercice 2. Soit l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Delta & : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & & P & \mapsto & P(X+1) - P. \end{array}$$

⚠ $P(X+1)$ désigne la composée de P par $X+1$, que l'on pourrait aussi noter $P \circ (X+1)$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer que $\text{Ker}\ (\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. En déduire $\text{Im}(\Delta)$.

4. Soit F l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(0) = 0$.

  a. Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.

  b. Montrer que : $F \oplus \text{Ker}\ (\Delta) = \mathbb{R}[X]$.

  c. Montrer que $\Delta_{|F}$ est un isomorphisme de F dans $\mathbb{R}[X]$.

5. **a.** Montrer qu'il existe une unique suite $(N_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ telle que $N_0 = 1$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left\{ \begin{array}{rcl} N_n(0) & = & 1 \\ \Delta(N_n) & = & N_{n-1}. \end{array} \right.$$

  b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ N_n = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$.

  c. Montrer que $(N_0, N_1, \dots, N_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que les coordonnées de Q dans la base $(N_0, N_1, \dots, N_n)$ sont :

$$(Q(0), \Delta(Q)(0), \Delta^2(Q)(0), \dots, \Delta^n(Q)(0)).$$

Exercice 3. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts, et soit $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les polynômes de Lagrange associés. Déterminer une expression simple du polynôme $P = \displaystyle\sum_{1\leqslant j\leqslant n} L_j$.

Exercice 4. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts, et soit $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les polynômes de Lagrange associés.

1. Montrer que $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

2. Déterminer sa base duale.

Exercice 5. Diagonalisation d'un endomorphisme.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$u(P) = (1 - X^2)P'' - XP'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer le noyau de u.
3. Pour les questions **3.a.** et **3.b.** seulement, on pose $n = 3$.
  a. Déterminer la matrice de u relativement à la base canonique (notée $\mathcal{B}$) de $\mathbb{R}_n[X]$.
  b. Déterminer une base de Im u.
4. On définit $P_0 = 1$, $P_1 = X$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P_{k+2} = 2XP_{k+1} - P_k.$$

  a. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence, sur $k \in \mathbb{N}$ que :

$$P_k(\cos\theta) = \cos k\theta.$$

  b. Soit P un polynôme. On pose $Q = u(P)$. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$(P(\cos\theta))'' = Q(\cos\theta)$$

5. Montrer que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $u(P_k) = -k^2 P_k$.
6. Pour les questions **6.a.** et **6.b.** seulement, on pose à nouveau $n = 3$.
  a. Montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On la notera $\mathcal{B}'$.
  b. Déterminer la matrice de u relativement à cette base $\mathcal{B}'$.

Exercice 6. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.
Soit f et g deux formes linéaires non-nulles définies sur E.
1. Démontrer qu'il existe $u \in E$ tel que $f(u) \neq 0$ et $g(u) \neq 0$.
2. On suppose qu'il existe p formes linéaires $f_1, \dots, f_p$ telles que :

$$\forall x \in E, (f_1(x) = \ldots = f_p(x) = 0) \Rightarrow x = 0.$$

Montrer que $\dim(E) \leqslant p$.