– Programme de colle n° 8 : du 18 au 22/11 –

Les questions de cours et les exercices portent sur tout ce qui suit : algèbre linéaire, matrices, déterminant.
En second exercice, on pourra poser un exercice de topologie ; notamment un exercice de calcul de norme subordonnée en dimension infinie (avec recherche d'une suite de vecteurs pour le calcul de la norme subordonnée).

Chapitre 7 - Révisions d'algèbre linéaire Applications linéaires. Dimension finie.

Rang d'un famille finie de vecteurs.

Majoration du rang par la dim de l'espace et par le nb de vecteurs de la famille. Cas d'égalités. ✎

Majoration du rang de u la dimension de E et par la dimension de F. Cas d'égalités.
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels tel que E soit de dimension finie. Alors :

$$E \text{ et } F \text{ sont isomorphes } \Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ est de dimension finie} \\ \dim E = \dim F. \end{cases}$$ ✎

Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et si E_0 est un supplémentaire de Ker u dans E, alors u induit un isomorphisme de E_0 dans Imu. ✎

Existence et unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange. ✎

⚠ Le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à $n+1$ points est de degré inférieur ou égal à n.

Formes linéaires d'un espace vectoriel de dimension finie.

⚠ Bien connaître la notion de base duale. Équation d'un hyperplan dans une base.

Si $\dim E = n$, l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n-m$. ✎

Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n-m$ est l'intersection de m hyperplans. ✎

Chapitre 8 - Révisions sur les matrices.

Soit $x \in E$ et soit $(x_1, \dots, x_p)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_1$.
En notant $y = u(x)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_2$, on obtient :

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j}$$ ✎

Si $v \in \mathcal{L}(F,G)$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$ alors :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(v \circ u) = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(v) \times M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)}$$ ✎

Formule de changement de bases : $\boxed{M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u) = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}'_2} \cdot M_{\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}'_2}(u) \cdot P^{-1}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'_1}}$ ✎

Cas particulier des endomorphismes : $\boxed{M_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot M_{\mathcal{B}'}(u) \cdot P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}}$

Une matrice est de rang r si, et seulement si, elle est équivalente à J_r.

Deux matrices semblables ont même trace.

⚠ Connaître des exemples de matrices carrés équivalentes mais pas semblables ; de matrices carrés de même trace et même rang mais pas semblables.

Formule sommatoire du déterminant : $\boxed{\det A = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}}$